

TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Elektroniikan, tietoliikenteen ja automaation tiedekunta

Kalle A. Eskola

Konttinosturin kuormauselimen ohjaaminen

Diplomityö

Espoo 5.10.2009

Valvoja:

Professori Heikki Koivo

Ohjaaja:

TkT Timo Sorsa

Tekijä Kalle A. Eskola	Päiväys 5.10.2009
	Sivumäärä 10+97
Työn nimi Konttinosturin kuormauselimen ohjaaminen	
Professuuri Systeemitekniikka	Koodi 2195
Työn valvoja Professori Heikki Koivo	
Työn ohjaaja TkT Timo Sorsa	
<p>Tarve tehokkaammille konttinostureille on johtanut nostureiden automaattisten toimintojen lisäämiseen. Eräs kehityskohde on automaattinen kontinpoiminta, jota tässä työssä tutkitaan kuormauselimen paikkasäädön osalta. Ohjaamiseen käytetään erityistä apukoneistoratkaisua. Kuormauselimen ja konttien mittaamisongelmaa ei käsitellä.</p> <p>Työ esittelee kuormauselimen ja apukoneistojen välisen matemaattisen mallin. Sen avulla suunnitellaan diskreetissä ajassa sekä Kalman-suodinta hyödyntävä LQ-säätö että klassinen PID-säätö. Suunnittelussa otetaan huomioon sekä ohjausten rajoitettu toiminta-alue että mittaus- ja ohjausviive. Myös mittauskohinan käsittelyä sivutaan. Lopuksi simuloituja säätötuloksia verrataan toisiinsa.</p> <p>Simulointien perusteella LQ-säätö toimii odotetusti PID-säätöä paremmin. Se on kuitenkin varsin hankala toteuttaa käytännössä ja se on myös erittäin herkkä viiveiden muutoksille. Käytännön testeihin on suositeltavaa valita robustimpi ja helpommin toteutettava PID-säätö.</p>	
Avainsanat Konttinosturi, kuormauselin, apukoneisto, LQ-säätö, PID-säätö, diskreetti, tilatarkkailija, Kalman-suodin, simulointi	

Author Kalle A. Eskola	Date 5.10.2009
	Pages 10+97
Title of thesis Controlling the spreader of container crane	
Chair Control Engineering	Chair code 2195
Supervisor Professor Heikki Koivo, Ph.D.	
Instructor Timo Sorsa, Dr. Tech	
<p>Due to need for more efficient container cranes more and more functions of cranes are being automated. One of the development areas is an automatic container picking which is studied in this thesis by controlling the spreader by auxiliary control machines. The problem of measuring the position of the spreader or containers is omitted.</p> <p>A mathematical model for the spreader and auxiliary control machines is presented. Then a discrete LQ control with a Kalman filter as well as a classical PID control is designed. Both the limited control and delays in measuring and controlling the spreader are taken into account. Measurement noise is briefly considered also. Finally simulated results are compared to each other.</p> <p>Based on the simulations LQ control excels PID control, as expected. However, the LQ control is fairly difficult to realize. It is also extremely sensitive to variations of delays. On practical issues more robust and easily implemented PID control is preferred.</p>	
Keywords Container crane, spreader, auxiliary machines, LQ control, PID control, discrete, state observer, Kalman filter, simulation	

Alkusanat

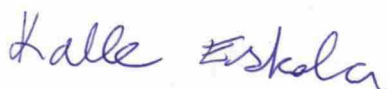
Tämä diplomityö on tehty Konecranes Oyj:n tuotekehitysosastolla Hyvinkäällä vuoden 2009 aikana. Haluan kiittää esimiestäni ja työni ohjaajaa TkT Timo Sorsaa erinomaisesta diplomityöpaikasta ja erittäin kiinnostavan aiheen tarjoamisesta. Olet aina pyytäessäni tarjonnut viipymättä kommentteja, tarvittavia lisätietoja ja näkemystä käytännön puoleen. Olet myös antanut minun keskittyä rauhassa työni kirjoittamiseen oppiessani samalla paljon uutta.

Kiitokset myös TkT Janne Salomäelle (Konecranes), jonka johtamalle mallille koko työ perustuu. Olet antanut aina uskoa työni onnistumiseen ja olet myös osallistunut kommentointiin. Kiitokset kuuluvat myös kaikille lähimmille työkavereilleni. Te luotte nuorekkaan, avuliaan ja positiivisen työilmapiiriin, jossa on helppo viihtyä.

Teknillisen korkeakoulun puolelta kiitän etenkin työni valvojaa professori Heikki Koivoa työni tarkastamisesta ja yleensäkin koko opiskelumahdollisuudesta. Haluan myös kiittää koko automaatio- ja systeemitekniikan osaston henkilökuntaa asiantuntevasta opetuksesta ja innostavasta ilmapiiristä vuosien saatossa. Erityismaininnan ansaitsevat TkT Kai Zenger ja TkT Jean-Peter Ylén.

Sydämelliset kiitokset vanhemmilleni, Kaarinalle ja Pekalle, jotka ovat aina painottaneet opiskelun tärkeyttä ja kannustaneet minua siihen. Olette aina antaneet minulle varauksettoman tuen ja luoneet rauhallisen oppimisympäristön. Ilman teidän taloudellisesta tukeanne täysipäiväinen opiskelu ei myöskään olisi ollut mahdollista. Kiitokset myös isosiskolleni Lauralle mallikkaasta sisarsuhteesta. Apusi on aina ollut lähellä. Olit myös erityisen tärkeä tekijä sopeutuessani uuteen asuinympäristöni. Lopuksi kiitän rakasta puolisoani Katariinaa. Kiitos, että olet siinä.

Hyvinkäällä 5. lokakuuta 2009



Kalle Eskola

Sisällysluettelo

Tiivistelmä	ii
Abstract.....	iii
Alkusanat.....	iv
Sisällysluettelo	v
Käytetyt merkinnät ja lyhenteet.....	vii
1 Johdanto	1
2 Kontinkäsittely ja konttinosturit.....	3
2.1 Kontinkäsittely satamissa	3
2.1.1 Kontti	3
2.1.2 Konttiterminaali	4
2.1.3 Kontinkäsittelylaitteet	4
2.2 Konttinosturin rakenne	6
2.2.1 Pääkomponentit	6
2.2.2 Nostokoneistot ja apukoneistojärjestelmä	7
2.2.3 Kuormauselin.....	7
2.3 Nostureiden heilahduksenhallinta.....	8
2.3.1 Yksiköysiset silta- ja pukkinosturit.....	9
2.3.2 Neliköysiset konttinosturit.....	9
3 Tilaesitys ja tilatarkkailija	11
3.1 Yleinen tilaesitys.....	11
3.2 Tilaesityksen linearisointi.....	12
3.3 Ohjattavuus ja tarkkailtavuus.....	13
3.4 Tilatarkkailija.....	14
3.4.1 Tilatarkkailijan periaate	15
3.4.2 Kohinan esittely tilatarkkailijaan	16
3.4.3 Vahvistusmatriisin valitseminen.....	17
4 Säätorakenteita	19
4.1 Tilasäätö.....	19
4.1.1 Regulointi.....	20
4.1.2 Referenssin tuominen systeemiin	21
4.1.3 Säädinmatriisien valitseminen LQ-menetelmällä	23
4.1.4 Integraalin lisääminen.....	29
4.2 PID-säätö	30
4.2.1 P-, I- ja D-termi.....	30
4.2.2 Käytännöllinen PID-säädin.....	31
4.2.3 Ehdollinen integrointi	32
4.2.4 Kaskadisäätö	34
4.2.5 Viritysmenetelmiä.....	35

4.3	Viiveet säätöpiirissä.....	38
4.3.1	Mittaus-, prosessi- ja ohjausviive	38
4.3.2	Viive säädössä.....	39
5	Diskreettiaikainen systeemi	40
5.1	Diskreetti aika	40
5.2	Näytteenotto.....	41
5.3	Jatkuva-aikaisen tilaesityksen diskretointi.....	42
5.4	Diskreetti tilatarkkailija	43
5.4.1	Prediktiivinen ja uusinta mittausta hyödyntävä tilatarkkailija.....	43
5.4.2	Diskreetti Kalman-suodin	44
5.5	Viiveiden käsittely diskreetissä systeemissä.....	45
5.5.1	Mittausviive	45
5.5.2	Ohjausviive	46
5.5.3	Viiveiden eliminointi tilatarkkailijalla.....	48
5.6	Diskreetit säätimet	49
5.6.1	Diskreetti LQ-säädin.....	50
5.6.2	Diskreetti PID-säädin.....	51
6	Konttinosturijärjestelmän kuvaus ja dynaamisen mallin muodostaminen	54
6.1	Järjestelmän kuvaus	54
6.2	Differentiaaliyhtälöiden johtaminen ja mallin simulointi.....	55
6.3	Tilaesityksen muodostaminen.....	59
6.3.1	Yleinen tilaesitys.....	59
6.3.2	Tilaesityksen linearisointi	61
6.3.3	Linearisoinnin hyvyyden tarkastelu.....	62
7	Kuormauselimen paikan säätö simulointiympäristössä.....	65
7.1	Tilasäätö.....	65
7.1.1	Tilatarkkailija.....	66
7.1.2	LQ-servosäädin.....	68
7.1.3	Integraalitermien lisääminen.....	71
7.2	PID-säätö	73
7.2.1	Nykyinen heilahduksen hallinta.....	73
7.2.2	PI+D-säätö	74
7.2.3	Kaskadisäätö	81
7.3	Säätöratkaisuiden vertailua	81
8	Yhteenveto	84
	Lähdeluettelo.....	86
	Liite A.....	90
	Liite B.....	92
	Liite C.....	96

Käytetyt merkinnät ja lyhenteet

Symbolit

A, B, C, D	Tilaesityksen matriisit
A_r, C_r	Referenssitilan muodostavan tilaesityksen matriisit
\hat{A}, \hat{B}	LQ-servotehtävän tilaesityksen matriiseja
B_{dm}, D_{dm}	Tilaesityksessä häiriöitä kertovat matriisit
$E(s)$	Erosuure Laplace-tasossa
G, G^*	Prosessi ja viiveetön prosessi
I	Identiteettimatriisi
$J_{fx}, J_{fu}, J_{gx}, J_{gu}$	Linearisoidessa käytettävät Jacobin matriisit
K	Tilasäädön regulaattori
K_c	Laplace-tasossa esitetyn PID-säätimen vahvistus
$K_e, K_{e,p}, K_{e,c}$	Kalman-suotimen vahvistukset (jatkuva aika; diskreetti, prediktiivinen; diskreetti, uusinta mittausta hyödyntävä)
K_f	Tilasäädön etusäädinmatriisi
K_P, K_I, K_D	Aikatasossa esitetyn PID-säätimen vahvistukset
K_u	PID-säätimen virityksessä käytettävä kriittinen vahvistus
M_c, M_o	Ohjattavuus- ja tarkkailtavuusmatriisi
N_u, N_x	Tilatakaisinkytkennän säädinmatriiseja
P	LQ-säätimen matriisi
P_e	Kalman-suotimen estimointivirheen kovarianssi
\hat{P}, \hat{Q}	LQ-servotehtävän tilaesityksen matriiseja
Q, R	LQ-säätimen painomatriisit tiloille ja ohjauksille
Q_k, R_k	Prosessi- ja mittauskohinan intensiteetit
S	Diskreetin LQ-säätimen laskentamatriisi
S_f	LQ-säätimen painomatriisi lopputilalle
T	Loppuaika
T_I, T_D	Aikatasossa esitetyn PID-säätimen integrointi- ja derivointiaika
T_P	Estimaatti suljetun silmukan dominoivasta jaksosta
T_t	PID:n integraalin nollautumisen nopeuden määräävä aikavakio
T_u	PID-säätimen virityksessä käytettävä kriittinen jaksonaika
$U(s)$	Ohjaus Laplace-tasossa
V, V^*	Kustannuskriteerin arvo ja kustannuskriteerin minimoitu arvo

\mathbf{b}	LQ-servosäätimen vektori
b	PID-säätimessä referenssiä kertova termi
\mathbf{d}_m	Tilaesityksen häiriövektori
d_u	Ohjaukseen summautuva virhe
h	Näyteväli
$q_{ii}, r_{ii}, s_{f, ii}$	Matriisien \mathbf{Q} , \mathbf{R} ja \mathbf{S}_f diagonaali-alkiot
r	Referenssi
t	Aika
u, u^*	Ohjaus ja optimoitu ohjaus
u_c	Laskettu, ei-saturoitunut ohjaus
u_P, u_I, u_D	PID-säätimen ohjauksen suhteellinen, integroiva ja derivoiva osa
u_{ss}	Tilasäädön myötäkytkentäohjaus
\mathbf{v}, \mathbf{w}	Tiloihin ja mittauksiin summautuva kohina
\mathbf{x}	Tilaesityksen tilavektori
\mathbf{x}_I	Tilaesitykseen lisättävä vektori erosuureen integraaleista
\mathbf{x}_m	LQ-servotehtävässä käytettävä tilavektori
\mathbf{x}_r	Referenssitilavektori
\mathbf{x}_s	Stationaaritila, johon tilaesitys linearisoidaan
$\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}$	Estimoidut tilavektorit (prediktiivinen ja uusinta mittausta hyödyntävä tai jatkuva-aikainen)
\mathbf{y}	Mittaukset prosessista
$\mathbf{y}_{1d}, \mathbf{y}_{2d}$	Yhden jakoon ja kaksi jaksoa viivästyneet mittaukset
$\hat{\mathbf{y}}$	Tilatarkkailijalla estimoidut mittaukset
\mathbf{z}	Referenssitilan dynaamisen mallin tilavektori
Δu	Diskreetin PID-säätimen ohjaussignaalin muutos
Φ, Γ	Diskreetin tilaesityksen systeemi- ja ohjausmatriisi
Γ_0, Γ_d	Diskreetin tilaesityksen ohjausmatriisit viiveellisessä tapauksessa
$\alpha_c, \alpha_p, \alpha_s$	Ohjaus-, prosessi- ja mittausviive
ε	Erosuure referenssin ja mittauksen välillä
ε_c	Erosuure lasketun ja toteutuneen ohjauksen välillä
τ_d	Suodatetun derivaatan aikavakio PID-säätimessä
τ_{dom}	Prosessin dominoiva aikavakio

Suureet

A	Köyden poikkileikkauksen pinta-ala [m^2]
E	Köyden eli teräksen kimmokerroin [N / m^2]
F_0	Apukoneistojen köysien perusköysivoima [N]
F_{diff}	Apukoneistojen perusköysivoimaan tehtävä muutos [N]
$F_{L1}, F_{L2}, F_{R1}, F_{R2}$	Apukoneistojen köysien köysivoimat [N]
H, H_s	Nostoköyden pituus ja sen linearisointipiste [m]
J	Taakan puolelle redusoitu moottorin hitausmomentti [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
J_c	Taakan hitausmomentti [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
J_m	Apukoneiston moottorin hitausmomentti [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
L	Etäisyys kuormauselimen keskeltä köysien kiinnityskohtaan [m]
M, M_s	Taakan massa (kuormauselin + kontti) ja linearisointipiste [kg]
N	Apukoneiston moottorin välityssuhde
T_0	Apukoneistojen moottorien perusmomentti [Nm]
$T_{L1}, T_{L2}, T_{R1}, T_{R2}$	Apukoneistojen moottorien momentit [Nm]
Z	Apumuuttuja [$1 / \text{m}$]
a_{cb}, a_{ct}	Pukin ja vaunun kiihtyvyys [m / s^2]
d_1, d_2	Etäisyydet köysirummulta kuormauselimen kiinnityskohtaan [m]
g	Putoamiskiihtyvyys [m / s^2]
k, k_s	Apukoneiston köyden jousivakio ja sen linearisointipiste [N / m]
m_c	Kontin massa [kg]
r	Apukoneiston köysirummun säde [m]
u_j	Ohjaussauvalla annettava ohjaus [Nm]
v_H	Taakan nostonopeus [m / s]
$\omega_{L1}, \omega_{L2}, \omega_{R1}, \omega_{R2}$	Apukoneistojen moottorien kulmanopeudet [rad / s]
$\omega_t, \omega_b, \omega_r$	Heilahduskulmanopeudet (vaunu, pukki ja rotaatio) [rad / s]
$\theta_t, \theta_b, \theta_r$	Heilahduskulmat vaunun ja pukin suunnassa sekä rotaatio [rad]
$\theta_{t,ref}, \theta_{b,ref}, \theta_{r,ref}$	Heilahduskulmien referenssit (vaunu, pukki ja rotaatio) [rad]

Operaattorit

$E(x)$	Odotusarvo
\dot{x}	Aikaderivaatta muuttujasta x
$f'(x)$	Funktion $f(x)$ derivaatta muuttujan x suhteen
$\frac{df(x)}{dx}$	Funktion $f(x)$ derivaatta muuttujan x suhteen
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$	Funktion $f(x, y)$ osittaisderivaatta muuttujan x suhteen
$\int_k^n f(x) dt$	Integraali funktiosta $f(x)$ muuttujan t suhteen
$\sum_{i=k}^n (x_i)$	Summa
$\delta(x)$	Diracin deltafunktio

Lyhenteet

HJB	Hamilton-Jacobi-Bellman-osittaisdifferentiaaliyhtälö
HMI	Ihmisen ja koneen välinen rajapinta (Human Machine Interface)
IAE	Kustannuskriteeri (Integral of Absolute Error)
ISE	Kustannuskriteeri (Integral of Squared Error)
ITAE	Kustannuskriteeri (Integral of Time Absolute Error)
ITSE	Kustannuskriteeri (Integral of Time Squared Error)
LQ	Lineaarinen optimisäätö (linear-quadratic control)
LQG	LQ-säädin ja Kalman-suodin yhdessä (linear-quadratic-Gaussian)
LQR	Reguloiva LQ-säädin (linear-quadratic regulator)
MIMO	Monimuuttujasysteemi (Multiple-Input, Multiple-Output)
PID	Tyypillinen syöte-vaste-säädin (Proportional-Integral-Derivative)
RMG	Kiskoilla kulkeva konttinosturi (Rail Mounted Gantry)
RTG	Kumipyörillä kulkeva konttinosturi (Rubber Tyred Gantry)
SISO	Systeemi yhdellä tulolla ja lähdöllä (Single-Input, Single-Output)
STS	Satamanosturi (Ship-to-Shore Gantry)
TEU	Konttiliikenteen perusyksikkö (Twenty-foot Equivalent Unit)
ZOH	Nollannen kertaluvun pito (Zero-Order Hold)

1 Johdanto

Viime vuosisadan alussa alkanut maailmantalouden kasvu on jatkunut muutamaa lyhyttä notkahdusta lukuun ottamatta nykypäivään saakka. Talouden kehitystä seuraten myös maailmalla kuljetettavan tavarán määrä on pääsääntöisesti kasvanut vuosi vuodelta. Tavaraa liikutetaan niin maalla, merellä kuin ilmassa. Laivaliikenne on hitaudestaan huolimatta tehokkain ja selvästi halvin tapa mannertenväliseen kuljetukseen. Tilavuudessa mitattuna arviolta 80-90 % maailmankaupasta kuljetetaan meritse. Tästä suurin osa on pakkaamatonta massatavaraa, kuten öljyä, rautaa, hiiltä ja viljaa. (ECSA, 2005) Jokseenkin kaikki muu tavara liikkuu pakattuna kontteihin. Erilaisia kontteja on jo pitkään siirretty rekoilla, junilla ja laivoilla, mutta vasta 1960-luvun lopulla aloitettu konttiliikenteen standardointi teki kuljettamisesta erityisen tehokasta. Standardoinnin jälkeen konttiliikenne on kehittynyt vuosien saatossa valtavaksi globaaliksi toiminnaksi, ja nykyisin suunnilleen 90 % kaikesta pakatusta tavarasta maailmanlaajuisesti kuljetetaan konttilaivoilla. (Cudahy, 2006)

Koska kontteja liikutellaan satamissa suuria määriä, voi pienikin parannus niiden käsittelyketjussa kasvattaa merkittävästi terminaalioperaattorien ja laivayhtiöiden tuottavuutta. Toisaalta operaattorit ovat myös pakotettuja tehostamaan toimintojaan, jotta jatkuvasti suurentuvien konttilaivojen liikennöinti pysyisi terminaaleissa sujuvana ja operaattorit säilyttäisivät näin kilpailukykynsä (Pinkham, 2008), (Robinson, 2008). On myös esitetty huolia, että terminaalien hitaus rajoittaa koko meriliikenteen tehokkuutta (ECSA, 2005).

Terminaalien tehokkuutta voidaan parantaa etenkin kasvattamalla niiden automaatio-astetta. Sitä onkin lisätty vähän kerrassaan, vaikkakin täysautomaattisesta satamasta ollaan vielä kaukana. Kuitenkin jo nyt tyypillisessä satamassa erityinen logistiikkatietojärjestelmä pitää kirjaa konttien sijainneista ja jakaa tiedon perusteella työmääräyksiä nosturien kuljettajille (Bozzo et al., 2001). Lisäksi kontinkäsittelylaitteissa on iso joukko avustavaa automaatiota, jolla saavutetaan muun muassa ympäristöystävällisempiä laitteita, alhaisempia käyttökustannuksia ja parempaa käytettävyyttä.

Kaikkia liikkuvia satamakoneita yhdistää se, että niiden toimintoja ohjaavat ihmis-kuljettajat. Konecranes Oyj:n toimitusjohtaja Pekka Lundmark uskookin terminaalien seuraavaksi kehitysalueeksi – etenkin länsimaissa, joissa työvoimakustannukset ovat suuret – muodostuvan automatisoidut konttipihat (Young, 2008). Tällä tarkoitetaan konttipihaa, jonka nosturit kykenevät itsenäisesti siirtämään kontteja tietojärjestelmien ohjeistamana. Niiden tarkoitus ei ole syrjäyttää kuljettajia kokonaan, sillä hankalimmat ajot ja poikkeustilanteet hoidettaisiin etäohjauksena ohjaushuoneesta. Aivan ensimmäiset tällaiset järjestelmät ovat jo tulleet markkinoille, joskaan ne eivät ole vielä kyenneet vastaamaan perinteisten järjestelmien suorituskykyyn ja alhaisempiin kustannuksiin (Young, 2009).

Automaattisen konttinosturin toiminta työmääräyksen saannin jälkeen voidaan jakaa karkeasti kahteen vaiheeseen. Ensimmäisessä vaiheessa nosturin on kyettävä ajamaan poimittavan kontin kohdalle ja jälkimmäisessä vaiheessa tarttumaan halutusta kontista kiinni. Näitä vaiheita seuraavat kontin siirto- ja laskuoperaatio ovat luettavissa vastaaviksi vaiheiksi. Poimintavaihe jakautuu edelleen kahteen osa-alueeseen. Ensiksi kontin ja siihen tarttuvan, teräsköysien varassa riippuvan kuormauselimen tarkka sijainti on pystyttävä mittaamaan. Toiseksi kuormauselin on kyettävä ohjaamaan saadun mittaustiedon perusteella tarkasti kontin päälle.

Kontin ja kuormauselimen paikan mittaamisongelmaa on tutkittu jo aiemmin. Tämän diplomityön tavoitteena on kehittää ratkaisuja poimintavaiheen toiseen osaan eli kuormauselimen paikkasäätöön. Näin työ eroaa klassisesta säätöongelmasta, jossa keskitytään vain taakan heilahduksenhallintaan. Saatuja tuloksia voidaan käyttää yhtenä osana automaattinosturin toimintaa tai yhtä lailla ihmisten ohjaamisessa nostureissa avustavana automaationa.

Konecranes Oyj:n valmistamissa konttinostureissa kuormauselimen ohjaamiseen käytetään erityistä apukoneistoratkaisua, jolla sitä voidaan liikuttaa vaakatasossa sekä kiertää pystyakselinsa ympäri. Ohjaamista tarvitaan, sillä kontti on todennäköisesti hieman sivussa vaunun keskipisteeseen nähden. Myös nosturin pukin ja vaunun liikkeistä syntyneet sekä tuulen aiheuttamat kuormauselimen heilahtelut on kyettävä kompensoimaan. Tavoitteena on luonnollisesti saada kuormauselin ajettua mahdollisimman nopeasti tavoitepisteeseensä kontin päälle ja myös pysymään siinä. Työn ulkopuolelle rajataan pukin ja vaunun liikuttaminen, nostoliike sekä mittaustiedon tuottaminen.

Työ jakautuu kolmeen osaan. Luvussa 2 esitellään lyhyesti satamaympäristöä ja sinne suunniteltuja nostureita sekä tutustutaan nostureiden heilahduksenhallintaan. Lukuihin 3-5 on poimittu työn kannalta keskeistä ja sovellettavissa olevaa säätötekniikan teoriaa alan kirjallisuudesta. Kolmas osa koostuu soveltavista luvuista 6 ja 7, joista ensimmäisessä esitetään kuormauselimen ja apukoneistojärjestelmän välinen dynamiikka ja jälkimmäisessä kyseiselle mallille suunnitellaan kaksi säätöratkaisua. Toinen näistä on diskreetti LQ-tilasäätö, joka hyödyntää Kalman-suodinta. Vertailukohdaksi otetaan perinteinen PID-säätö. Suunnitteluissa otetaan huomioon sekä ohjausten rajoitettu toiminta-alue että mitta- ja ohjausviive. Myös mittauskohinan käsittelyä sivutaan. Vaikka suunnittelu tehdään simulointiympäristössä, käytännön toteutusta ei kokonaan unohdeta.

2 Kontinkäsittely ja konttinosturit

Tässä luvussa tutustutaan konttiterminaleihin (osio 2.1), esitetään konttinostureiden rakenne (osio 2.2) ja perehdytään nostureiden heilahduksenhallintaan (osio 2.3).

2.1 Kontinkäsittely satamissa

Seuraavassa määritellään lyhyesti kontti (alaosio 2.1.1) sekä esitellään yleisesti kontti-terminaalit (alaosio 2.1.2) ja niiden tyypillisiä kontinkäsittelylaitteita (alaosio 2.1.3).

2.1.1 Kontti

Kontti on uudelleenkäytettävä varastointiyksikkö (kuva 1), jota voidaan siirtää kuljetusvälineestä toiseen ilman sisällön uudelleenlastausta. Kontteja käytetään niin maantie-, rautatie-, lento- kuin merikuljetuksissa. Kontteja voidaan käyttää myös muihin tarkoituksiin, kuten toimisto- tai varastointitiloina. Kontit, jotka usein valmistetaan teräksestä, on suunniteltu helposti siirrettäviksi ja kiinnitettäväksi. Kontteja myös voidaan pinota 7-9 kappaletta päällekkäin. Nostoa ja kiinnitystä varten kontin kaikissa kahdeksassa nurkassa on nurkkavalokset, joiden reikiin nostinlaitteen nurkkalukot kiinnitetään kääntämällä niiden lukitsevaa päätä.



Kuva 1: 20-jalkainen kontti (CONTAINEX, 2007)

Tyypillisimmät kuljetuskontit ovat pituudeltaan 20, 40 tai 45 jalkaa. Standardi ISO 668:1995 asettaa tietyt toleranssit konttien mitoille, joten niiden tarkat mitat vaihtelevat hieman eri valmistajien mukaan. Tyypilliset mitat ja painot on listattu taulukkoon 1. (Wikipedia, Intermodal container)

Taulukko 1: Tyypillisiä konttien mittoja

kontti / mitat	pituus	leveys	korkeus	kontin massa	maksimikuorma
20-jalkainen	6,1 m	2,4 m	2,6 m	2 200 kg	28 200 kg
40-jalkainen	12,2 m	2,4 m	2,6 m / 2,9 m	3 850 kg	26 600 kg
45-jalkainen	13,7 m	2,4 m	2,9 m	4 800 kg	25 600 kg

Konttiliikenteen perusmittayksikkö on TEU (engl. *twenty-foot equivalent unit*), jolla tarkoitetaan yhden 20-jalkaisen kontin kapasiteettia. TEU on likimääräinen mitta, joten 40- ja 45-jalkaiset vastaavat kahta TEU:ta. (Wikipedia, Twenty-foot equivalent unit)

Konttinosturit (kuva 3), joiden rakenne esitetään tarkemmin osiossa 2.2, jakautuvat satama- ja kenttänostureihin. Suuria satamanostureita eli STS-nostureita (engl. *Ship-to-Shore Gantry*) käytetään laivojen lastaamiseen ja purkamiseen. STS-nostureilla on suuri vaikutus terminaalien tehokkuuteen. Kenttänostureita ovat RMG- ja RTG-nosturit (engl. *Rail Mounted Gantry* ja *Rubber Tyred Gantry*). Niitä käytetään suurissa satamissa konttipihojen järjestelyyn. RMG-nosturi on teräskiskoilla kulkeva pukkinosturi, jonka jalkojen väliin voi mahtua jopa 12 konttia. Satamissa kiskot rajoittavat varastointia sekä aiheuttavat vaikeuksia muulle liikenteelle, minkä vuoksi on kehitetty kumipyörillä liikkuvat RTG-nosturit. Ne ovat rakenteeltaan RMG-nostureita kevyempiä. Niiden jalkojen väliin mahtuu 6-7 konttia.



Kuva 3: STS-nosturi (vasemmalla), RMG-nosturi (keskellä) ja RTG-nosturi (oikealla)

Kevyempään kontinkäsittelykalustoon (kuva 4) kuuluvat trukit (engl. *lift truck*), kurottajat (engl. *reach stacker*) ja lukit (engl. *straddle carrier*). Ne eivät ole niin tehokkaita kuin konttinosturit, mutta toisaalta tarjoavat enemmän joustavuutta. Suurissa satamissa niitä käytetään konttipihan rajapinnassa maa- ja meripuolelle, mutta pienissä ja keskisuurissa satamissa niillä hoidetaan myös konttipihan ylläpito. Trukit yltävät parhaimmillaan 5 - 6 kontin pinokorkeuteen, mutta ovat hitaita liikkumaan. Kurottajat kykenevät pinoamaan yleensä 3 - 5 konttia. Ne yltävät kurottamaan toiseen konttiriviin, jonka vuoksi niillä voidaan käsitellä neljä konttia leveitä pinoja. Trukit ja kurottajat vaativat paljon tilaa ympärilleen, jonka vuoksi ne eivät sovellu tiiviisiin konttipihoihin. Lukit ovat puolestaan suunniteltu tiiviisti asteltujen konttirivien välissä ajamiseen. Ne kykenevät 3 - 4 kontin pinokorkeuteen.



Kuva 4: Trukki (vasemmalla), kurottaja (keskellä) ja lukki (oikealla)

Kenttänosturit ovat kevyempää kalustoa tuottavampia ja käyttökustannuksiltaan alhaisempi ratkaisu, kun konttipihan käsiteltävä konttimäärä on suuri tai ajomatkat ovat

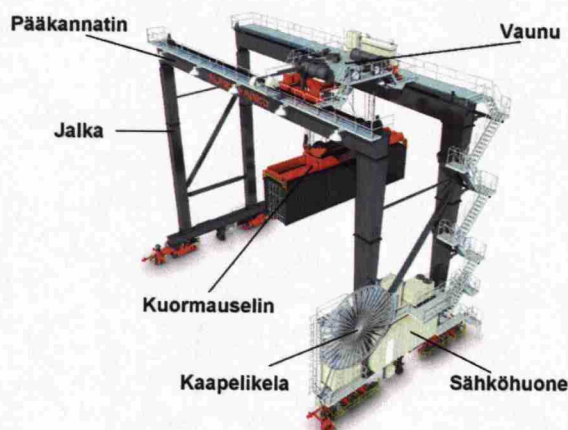
pitkiä. Niitä käytetään etenkin, kun kontteja halutaan pinota tiheästi ja korkealle maanalan säästämiseksi, jolloin konttirivien välissä ei ole mahdollista ajaa millään nosturilla. Ne ovat myös polttomoottorikalustoa ympäristöystävällisempiä, sillä useimmat niistä kykenevät toimimaan täysin sähköisesti. (Koukussa, 2009)

2.2 Konttinosturin rakenne

Tässä osiossa kuvataan konttinosturin pääkomponentit (alaosio 2.2.1) sekä nosto- ja apukoneistot (alaosio 2.2.2). Lopuksi määritetään kuormauselin (alaosio 2.2.3).

2.2.1 Pääkomponentit

Konttinosturi koostuu kolmesta pääkomponentista (kuva 5). Tärkein osa on pukki, joka kannattelee muita osia. Pukki koostuu pääpiirteissään kahdesta päädyistä, joissa on jalat ja päätykannattajat, sekä kahdesta päätyjen päällä lepäävästä pääkannattajasta. Pääkannattajilla voi myös olla ulokkeet päätyjen ulkopuolella. Pukilla voidaan ajaa yhtä akselia pitkin. Toinen osa on vaunu, joka sijaitsee pukin pääkannattajien kiskojen päällä. Vaunu liikkuu omalla ajokoneistollaan kohtisuoraan pukin liikettä kohtaan. Kolmas osa on konttien poimimiseen käytetty kuormauselin, joka on ripustettu vaunuun tyypillisesti neljällä teräksestä valmistetulla nostoköydellä. Nostoköysien pituuksia muuttamalla kuormauselintä voidaan ajaa ylös ja alas. Näin pukki, vaunu ja nostokoneisto mahdollistavat yhdessä käytettynä kolmiulotteisen liikkeen.



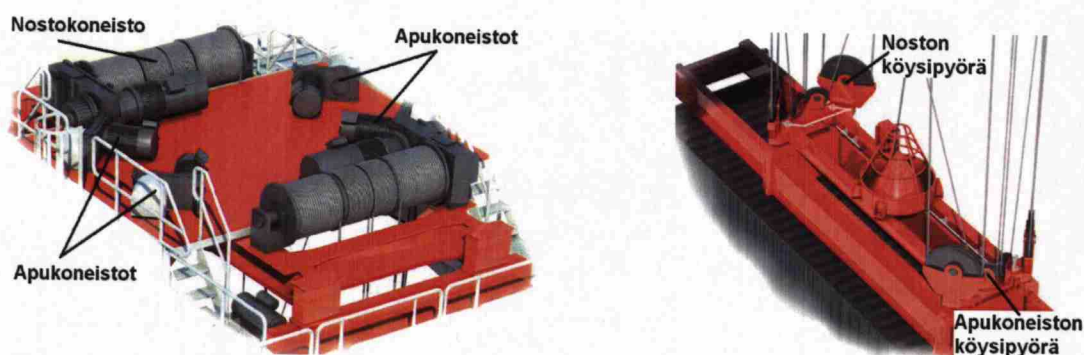
Kuva 5: Konttinosturin (RTG) pääkomponentit

Muita merkittäviä nostureiden osia ovat muun muassa sähköhuone ja ohjaamo sekä mahdollinen kaapelikela. Sähköhuoneeseen on sijoitettu nosturin keskeiset elektroniset komponentit, kuten ohjelmoitavat logiikat ja moottorien ohjaamiseen käytettävät taajuusmuuttajat. Se sijaitsee joko nosturin pyörien päällä tai kiinnitettynä toiseen pääkannattimeen. Ohjaamo puolestaan on osa vaunua, josta käsin nosturin kuljettaja ohjaa ohjaussauvoilla nosturin liikkeitä. Ohjaamo sijaitsee nosturin koosta riippuen noin 20 metrin korkeudella maan pinnasta. Konttinosturit toimivat sähkömoottoreilla. STS- ja RMG-nostureille niiden tarvitsema sähkö syötetään kaapeleiden kautta. Kaapeli

kulkee nosturin vieressä olevassa kaapeliurassa ja ylimääräinen kaapeli kelautuu nosturin liikkeessä nosturissa olevalle kaapelikelalle. Myös tiedonsiirtokaapeli käyttää kaapelikelaa. RTG-nosturit tuottavat sähkönsä dieselgeneraattoreilla, mutta uusimmat RTG:t voivat olla hybridimalleja, joissa on dieselmoottorin ohella myös sähkönsyöttö.

2.2.2 Nostokoneistot ja apukoneistojärjestelmä

Kuormauselin on kiinnitetty köysillä vaunussa sijaitsevaan kahteen nostokoneistoon (kuva 6). Nostoköysillä, joiden varassa taakka lepää, ohjataan taakan korkeutta. Kiinnityksestä johtuen pukin ja vaunun kiihtyvyydet aiheuttavat kuormauselimeen heilahtelua. Sitä ja kiertoliikettä eli rotaatiota aiheuttavat myös tuuli ja epäsymmetrinen kontin painojakauma.



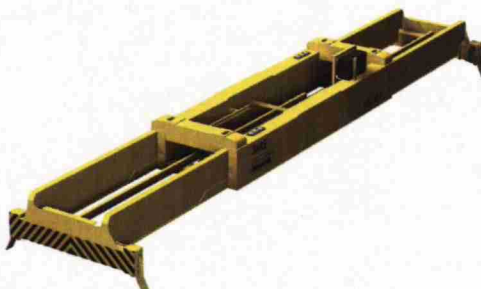
Kuva 6: Nosto- ja apukoneistot vaunussa (vasemmalla) sekä yhteys kuormausorteen (oikealla)

Heilunnan hallitsemiseksi ja taakan poikkeuttamiseksi vaunuun on suunniteltu erityinen apukoneistojärjestelmä (kuva 6). Se muodostuu neljästä identtisestä, RMG- ja RTG-nostureissa symmetrisesti sijoitetuista koneistosta. Kukin koneisto koostuu moottorista, taajuusmuuttajasta, vaihteesta ja köysirummusta. Apukoneistojen ja kuormauselimen köysipyörät yhdistyvät vinoilla teräsköysillä siten, että köyden toiset päät kelautuvat nostokoneistojen teloille. Kunkin apuköyden köysivoimaan vaikutetaan sen omalla itsenäisellä apukoneistolla. Taakan heiluessa apukoneistojen moottorit pyörivät. Kuormauselimen ohjaaminen on mahdollista muuttamalla apukoneistojen moottorien momenttiohjeita keskenään erisuuriksi. Näin myös apuköysien köysivoimat tulevat keskenään eri suuriksi ja taakka liikkuu kohti suurimpia tasoon projisioituja köysivoimia. Apukoneistoilla taakkaa voidaan liikuttaa kaksiulotteisesti sekä kiertää vaakatasossa. Tähän saakka toteutetuissa säätöjärjestelmissä jokaiselle apukoneistolle on käytetty omaa säätöpiiriä, jonka tehtävänä on ollut huolehtia osaltaan heilahduksenvaimennuksesta eli kuorman ajamisesta tasapainotilaan vaunun keskelle. Koska apukoneistot on RMG- ja RTG-nostureissa sijoitettu symmetrisesti, on kussakin koneistossa voitu käyttää samoja säädinparametreja.

2.2.3 Kuormauselin

Kuormauselin koostuu kuormausorresta (engl. *headblock*) sekä sen alareunaan kiinnitettävästä tarttujasta (engl. *spreader*). Kuormausorsi muodostaa fyysisen yhteyden

nosturin vaunun ja tarttujan välille. Siihen kiinnitetään sekä nosto- että apukoneistojen köysitykset. Tarttujalla (kuva 7) nimensä mukaisesti tartutaan konttiin. Yleisesti käytetään teleskooppista tarttujaa, jolla voidaan käsitellä erimittaisia kontteja. Kontin päälle laskeutumisen helpottamiseksi tarttujaan voidaan asentaa käännettävät ohjaimet. Huoltotarpeen vuoksi tarttujan tulee olla helposti irrotettavissa.



Kuva 7: Tarttuja (Bromma, 2005)

2.3 Nostureiden heilahduksenhallinta

Taakan heilahtelu on hyvin ei-toivottu ilmiö kaikentyypisissä nostureissa. Sitä aiheuttavat nosturin tai vaunun kiihtyvyyden muutokset, vinoilla köysillä tapahtuva nostoliike ja ulkoiset häiriöt, joista tuuli on merkittävin. Paitsi että heilahtelu muodostaa turvallisuushan taakan liikkuessa hallitsemattomasti ja rasittaen samalla nosturin mekaanisia rakenteita, se myös merkittävästi hidastaa taakan siirtämistä, sillä operaattori joutuu nosto- ja laskutapahtumissa odottamaan heilahduksen vaimentumista. Ongelmaa korostaa entisestään se, että vaimeneminen voi olla varsin hidasta. Vaikka itse heilahduskulma jää yleensä melko pieneksi, aiheuttaa se suuria taakan siirtymiä, kun vaunun ja taakan etäisyys on suuri.

Nosturin paikoitus yhdistettynä heilahduksenhallintaan on klassinen säätötekniikan esimerkki, jota kuitenkin pidetään yhtenä haastavimmista ongelmista. Tavoitteena on ajaa nosturi mahdollisimman nopeasti toiseen paikkaan aiheuttamatta kuitenkaan taakkaan suurta heilahdusta, etenkin liikkeen päättyessä. Huomattava määrä tutkimusta on tehty taakan hallitsemiseksi. Aiheesta on helposti löydettävissä kymmenittäin raportteja. Niissä pukkinostureita mallinnetaan eri tasoilla. Yksinkertaisemmat julkaisut käsittelevät ainoastaan yhden kulman säätöä pelkällä vaunun liikkeellä. Hieman kehittyneemmissä malleissa otetaan myös huomioon joko nostoliike, kaksiulotteinen liike tai kummatkin näistä. Köydet mallinnetaan yleensä jäykkinä ja massattomina, mutta osassa tutkimuksista tarkastellaan myös venyviä köysiä. Massan ajatellaan käytännössä aina olevan pistemäinen.

Konttinosturit mallinnetaan usein tavallisina silta- tai pukkinostureina (alaosio 2.3.1). Konttinostureissa tyypillisesti käytettävä neliköysinen ripustus (alaosio 2.3.2) kuitenkin eroaa oleellisesti yksiköysisistä ratkaisuista. Tutkimuksia tällaisista rakenteista on saatavilla huomattavasti rajallisemmin kuin yleisistä nostureista. Säätötulos on kuitenkin oletettavasti parempi suunnittelun pohjautuessa realistisempaan malliin.

2.3.1 Yksiköysiset silta- ja pukkinosturit

Mikäli mittauksia taakan paikasta ei ole saatavilla, joudutaan turvautumaan avoimeen ohjaukseen. Tällöin siirrosta johtuvaa heilahtelua on perinteisesti pyritty hallitsemaan optimoiduilla nopeusrampeilla. Nopeusrampin idea perustuu oikea-aikaiseen kiihdytyspulssiin. Kiihdytyksen alussa syntynyt heilahdus kompensoidaan lopettamalla kiihdytys oikealla hetkellä, jolloin syntyy yhtä suuri mutta vastakkaissuuntainen heilahdus. Koska vakionopeudella ajettaessa heilahtelua ei synny, on jäljelle jäävä heilunta kiihdytyksen jälkeen näin teoriassa nolla. Samaa menetelmää käytetään luonnollisesti myös taakan pysäyttämisenä. Kiihdytyksen tai jarrutuksen pituutta voidaan usein lyhentää käyttämällä kahta kiihdytyspulssia. (Koponen, Virkkunen, 1983, s. 4-6), (Sorsa, 1994)

Tapauksille, joissa taakan paikka pystytään mittaamaan, eri lähteet esittelevät kirjavan joukon säätömenetelmiä. Suositettu keino radan suunnittelussa on käyttää jotakin kustannuskriteeriä ja minimoida se optimisäädöllä tyypillisesti joko ajan, energian tai heilahduskulman suhteen. Tällaisia säätimiä ovat tehneet muun muassa Al-Garni et al. (1995), Corrigan et al. (1998) ja Yoshida ja Kawabe (1992). Al-Garni et al. on näistä monipuolisin ottaen huomioon kolme liikesuuntaa, kaksi heilahduskulmaa ja rajoitetut ohjaukset. Corrigan et al. käyttävät säädössä muuttuva-arvoista säädinmatriisia ja ohjauksina vaunun liikettä sekä nostoliikettä. Yoshida ja Kawabe käsittelevät rajoitettua ohjausta ja mallinnusvirheitä pelkällä vaunun liikkeellä. Tuloksena on epälineaarinen säädin.

Muita tyypillisiä säätimiä ovat esimerkiksi tilatakaisinkytkentä, jonka Moustafa (1994) on johtanut aikavariantille mallille, Lyapunovin teoreemaan perustuvat säätimet, joista yhden ovat tehneet joustavalle köydelle Joshi ja Rahn (1995), juuriuralla suunniteltu säädin (Lee, 1998) ja PID-säädin, josta Lee (2003) on tehnyt adaptiivisen ja epälineaarisen version. Sumeat säätimet ovat myös usein käytettyjä. Niitä perustellaan paremmalla epälineaarisuuksien ja nosturin parametreihin liittyvän epävarmuuden hallinnalla. Sumeita säätimiä ovat tutkineet julkaisuissaan muun muassa Mahfouf et al. (2000) ja Lee ja Cho (2001). Yhteistä näille kaikille edellä mainituille säädöille on, että ne eivät sisällä esimerkiksi viiveiden huomioimista tai itsekritiikkiä. Tuloksia niissä on yleensä arvioitu simuloiden.

2.3.2 Neliköysiset konttinosturit

Morrish et al. (1997) ovat johtaneet perusteellisesti kuormauselimen dynamiikan approksimoimalla energiaa. Saman tutkijaryhmän jatkotyö (Cartmell et al., 1998) ottaa lisäksi huomioon pukin ja vaunun liikkeet sekä nostoliikkeen. Kompaktimman ja tarkemman mallin perustuen minimienergiaperiaatteeseen ovat esittäneet Lee et al. (2003). Heillä on myös jatkotutkimus (Lee, Kim, 2004). Kaikki neljä työtä esittelevät dynamiikan hankalasti ratkaistavassa muodossa eivätkä ota huomioon apukoneistoja, mistä syistä töillä on varsin vähän sovellusarvoa.

Masoud ja Nayfeh (2003) esittävät yhden mallin neliköysiselle nosturille ja soveltavat ohjaamiseen mallin yksinkertaistetun version pohjalta viivästettyä takaisinkytkentää. Ohjaamiseen käytetään vaunun liikettä ja nostoliikettä. Kim et al. (2004) kuvaavat toisen mallin tutkielmassaan. Siinä malli on kuvattu yksinkertaisemmin tilaesityksenä ja säädin on suunniteltu integroivana tilatakaisinkytkentänä. Ohjauksena käytetään pelkkää vaunun liikettä.

Kokonaan toinen lähestymistapa heilahduksenhallintaan on käyttää apukoneisto-järjestelmää. Suurin ero apukoneistojärjestelmän ja edellä esitettyjen järjestelmien välillä on, että ensin mainitussa ei (välttämättä) pyritä millään tavoin muuttamaan siirtoliikkeelle annettavaa ohjausta, vaan taakanhallinta tapahtuu pelkästään itsenäisillä apukoneistoilla. Koska apukoneistojärjestelmä ei ota kantaa, mistä heilahtelu on peräisin, se eliminoi myös ulkoisista häiriöistä ja vinoköysistä johtuvat heilahtelut. Apukoneistoilla voidaan kummankin suuntaisen heilahtelun lisäksi vaikuttaa myös vaakatasossa kiertymiseen.

Ainoat löydetty raportit, joissa ohjaus tehdään apukoneistoilla, ovat tehneet Kim ja Lee (2006) sekä Lappalainen (2004). Ensin mainittujen työssä säätö perustuu PID-säätimeen ja optimaaliseen apuköysien jännitysjakautumaan. Lappalainen on puolestaan kuvannut diplomityössään konttinosturin säätöpiirejä ja testannut niiden viritysmenetelmiä käytännössä. Yhteistä kaikille säätöjärjestelmille – niin yksi- ja neliköysisissä nostureissa kuin apukoneisto-järjestelmissä – on, että ne vain pyrkivät pitämään taakan heilahtelut kurissa. Yhtään tutkimusta taakan paikoittamisesta muuhun tavoitepisteeseen ei ole löytynyt.

Tämän diplomityön lähtökohtana on, että mittauksia saadaan sekä taakan paikasta ja kiertymästä että referenssipisteestä eli joko nostettavan kontin sijainnista tai paikasta, jonka päälle kuljetettava kontti lasketaan. Taakan paikkaan vaikutetaan apukoneistojen moottoreiden momenttiohjeilla. Myös pukkia ja vaunua voitaisiin siirtää, mutta tässä työssä niiden oletetaan olevan paikoillaan poiminta- ja laskuvaiheen ajan.

Seuraavaksi luvussa 3 käsitellään prosessin kuvaaminen tilaesityksellä ja puuttuvien tilojen estimointi tilatarkkailijalla. Luvussa 4 esitellään LQ- ja PID-säädöt. Luvussa 5 jatketaan tilaesityksen, tilatarkkailijan ja säädinrakenteiden diskreeteillä eli tietokoneissa käytettävillä versioilla. Näiden lukujen jälkeen luvussa 6 esitetään apukoneistojen ja kuormauselimen välinen dynaaminen malli ja lopuksi luvussa 7 suunnitellaan kuormauselimen ohjaamiseen LQ- ja PID-säätö pohjautuen lukujen 3-5 teoriaan.

3 Tilaesitys ja tilatarkkailija

Tässä luvussa tutustutaan yleisen systeemin kompaktiin matemaattiseen kuvaukseen. Tätä kuvaustapaa kutsutaan tilaesitykseksi ja sitä sovelletaan luvussa 6 kuormauselimen dynamiikan esittämiseen. Jatkuva-aikainen tilaesitys koostuu systeemiä kuvaavista differentiaaliyhtälöistä. Koska nämä yhtälöt ovat hyvin usein epälineaarisia, on niistä muodostettu tilaesityskin epälineaarinen. Tällainen tilaesityksen yleinen muoto esitellään osiossa 3.1.

Koska tunnetut tilasäätömenetelmät perustuvat kuitenkin lineaarisiin systeemeihin, on näiden menetelmien soveltamiseksi yleinen, epälineaarinen tilaesitys ensin linearisoitava. Tämä menetelmä esitellään osiossa 3.2. Osioissa 3.3 määritellään neljä tilaesitykseen liittyvää peruskäsitettä. Lisäksi tilasäätömenetelmissä usein oletetaan, että kaikki tilat ovat mitattavissa. Tämä ei kuitenkaan ole käytännössä kovin yleistä, vaan puuttuvat tilat tulee estimoida tilatarkkailijalla, jollainen johdetaan osiossa 3.4.

3.1 Yleinen tilaesitys

Tilaesityksen avulla on helppo tutkia yleisiä systeemejä, jotka voivat koostua esimerkiksi epälineaarisista differentiaaliyhtälöistä, sillä kyseinen menetelmä tarjoaa kompaktin ja vakiintuneen esitystavan tällaisille systeemeille. Lisäksi tilaesityksellä on vaivatonta käsitellä monimuuttujasysteemejä, joissa voi olla sekä useita tuloja että useita lähtöjä. Tilaesityksestä saadaan myös määrättyä systeemin sisäinen tila, kuten paikka ja nopeus. Nämä tilat puolestaan saadaan tarvittaessa liitettyä systeemin tuloihin ja lähtöihin. Vertailun vuoksi siirtofunktiomuoto liittyy vain systeemin tulon systeemin lähtöön eikä näin sisällä mitään tietoa systeemin sisäisestä käyttäytymisestä. (Franklin et al., 2006, s. 338)

Tilaesityksessä mielivaltaisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä esitetään tilamuuttujien avulla ryhmänä ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä. Tilojen valinta voidaan tehdä äärettömän monella eri tavalla, joten tilaesitys ei ole yksikäsitteinen. Yleinen tilaesitys on muotoa

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases} \quad (1)$$

Se koostuu tilavektorista \mathbf{x} (n alkia $n:n$ kertaluvun systeemille), tämän aikaderivaatasta $\dot{\mathbf{x}}$, tulosuurevektorista \mathbf{u} (m alkia), lähtösuurevektorista \mathbf{y} (p alkia) ja näitä yhdistävistä funktiosta systeemi yhtälöstä $\mathbf{f}(t)$ ja lähtökuvauksesta $\mathbf{g}(t)$. (Ylén, 2009, luento 2)

3.2 Tilaesityksen linearisointi

Monet fyysiset prosessit ovat luonteeltaan epälineaarisia. Osassa prosesseista epälineaarisuus on hyvin selvää, osassa se voi olla täysin merkityksetöntä. Perinteisesti säätötekniikka on keskittynyt lähes kokonaan lineaaristen systeemien analysointiin ja säätöön. Siksi useimmat olemassa olevat säätösuunnittelumenetelmät ovat käyttökelpoisia vain lineaarisille järjestelmille. Onneksi monet prosessit ovat vain lievästi epälineaarisia, ja itse asiassa kaikki epälineaariset järjestelmät alkavat lähestyä lineaarista käyttäytymistä siirtyessään kohti stationaari- eli tasapainotilaansa. (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 311, 625)

Linearisointi-termiä käytetään yleisesti menetelmälle, jolla epälineaarista prosessia approksimoidaan jollakin lineaarisella mallilla. Linearisointiin on olemassa kolme menetelmää (Franklin et al., 2006, s. 492). Ensimmäinen keino on käyttää osaa ohjauksesta kumoamaan epälineaariset termit ja suunnitella jäljellejäävä ohjaus lineaarisen säätöteorian pohjalta. Tämä menetelmä eli linearisointi takaisinkytkennällä on suosittu etenkin robotiikassa, jossa sitä kutsutaan lasketun momentin menetelmäksi (engl. *method of computed torque*). Toinen menetelmä, jota tosin usein käytetään vain korjaamaan antureiden ja toimilaitteitten vähäisiä epälineaarisuuksia, on yrittää etsiä käänteinen epälineaarisuus (engl. *inverse nonlinearity*), joka yhdessä epälineaarisen osan kanssa muodostaa lineaarisen yhdistelmän. Kolmas tapa, joka perustuu Taylorin sarjakehitelmään, on kaikista tunnetuin ja suosituin. Siinä epälineaarista prosessia approksimoidaan yleensä sen stabiilin toimintapisteen läheisyydessä lineaarisella mallilla. Mitä heikommin prosessi on epälineaarinen, sitä kauemmas linearisointipisteestä lineaarinen malli kuvaa prosessia kelpollisesti. Toisaalta on tärkeää muistaa, että lineaarinen malli toimii hyvin vain pienille muutoksille tasapainopisteen läheisyydessä. Tutkitaan tätä linearisointimenetelmää lähemmin.

Kaikki realistisia prosesseja kuvaavat funktiot $f(x)$ voidaan ilmaista pisteen $x = x_s$ ympäristössä Taylorin sarjakehitelmällä

$$f(x) = f(x_s) + \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_s} (x - x_s) + \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x=x_s} \frac{(x - x_s)^2}{2!} + \dots + \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_{x=x_s} \frac{(x - x_s)^n}{n!} + \dots \quad (2)$$

Kun jätämme ensimmäistä kertalukua korkeammat termit huomiotta, yhtälöstä (2) tulee

$$f(x) \approx f(x_s) + f'(x_s)(x - x_s),$$

joka on nyt lineaarinen. Kun $(x - x_s)$ on hyvin pieni, korkeammat kertaluvut ovat vielä tätäkin pienempiä. Näin pienille muutoksille lineaariapproksimaatio on toimiva.

Vastaavasti tilaesitykselle

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \end{cases} \quad (3)$$

jossa on n tilaa ja m ohjausta, saadaan Taylorin sarjakehitelmällä

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^T}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \\ \mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^T}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}^T}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s). \end{cases} \quad (4)$$

Yllä olevia matriiseja

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}\mathbf{u}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^T}, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{g}\mathbf{x}} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^T}, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{g}\mathbf{u}} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}^T}$$

kutsutaan Jacobin matriiseiksi. Valitsemalla linearisointipisteeksi systeemin tasapainotila $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ seuraa, että myös $f(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) = \mathbf{0}$. Lisäksi on tavanomaista merkitä tilaesityksen (4) erosuureita yksinkertaisemmin, jolloin saadaan standardimuotoinen lineaarinen tilaesitys

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (5)$$

missä \mathbf{A} ($n \times n$) on systeemimatriisi, \mathbf{B} ($n \times m$) ohjausmatriisi, \mathbf{C} ($p \times n$) lähtömatriisi ja \mathbf{D} ($p \times m$) suoravaikutusmatriisi. Usein $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 320-321), (Ylén, 2009, luento 2)

3.3 Ohjattavuus ja tarkkailtavuus

Tarkastellaan seuraavaksi neljää peruskäsitettä, joilla on varsin keskeinen merkitys differentiaalijärjestelmien analyysissä. Valitettavasti kahden käsitteen suomenkieliset vastineet – kuten englanninkielisetkään termit – eivät ole vakiintuneet, vaan eri lähteissä käytetään samoja termejä kuvaamaan eri asioita. Toisissa lähteissä puhutaan saavutettavuudesta (engl. *reachability*) ja ohjattavuudesta (engl. *controllability*), kun taas toisissa lähteissä näitä vastaavat termit kyseisessä järjestyksessä ovat ohjattavuus (engl. *controllability*) ja stabiloituvuus (engl. *stabilizability*). Tässä työssä on valittu jälkimmäinen tapa.

Ohjattavuus ja tarkkailtavuus kuvaavat, kuinka järjestelmän tulot vaikuttavat tilavektoreihin ja kuinka tilavektorit näkyvät järjestelmän lähdöissä (Glad, Ljung, 2000, s. 44-45). Kaikki suljetun silmukan navat voidaan asettaa mielivaltaisesti kompleksitasossa, jos ja vain jos systeemi on sekä ohjattava että tarkkailtava (Dorf, Bishop, 2004, s. 661).

Systeemi on ohjattava (engl. *controllable*), jos on mahdollista löytää rajoittamaton ohjaussekvenssi $\mathbf{u}(t)$, jolla saavutetaan mielivaltainen tila $\mathbf{x}(t)$ mielivaltaisesta alkutilasta $\mathbf{x}(t_0)$ äärellisessä ajassa (Dorf, Bishop, 2004, s. 661), (Ylén, 2009, luento 6). Koska järjestelmän ohjattavat tilat muodostavat ohjattavuusmatriisin

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (6)$$

rangin, on järjestelmä ohjattava, jos ja vain jos ohjattavuusmatriisin rangi on n (Glad, Ljung, 2000, s. 45). Kun järjestelmä ei ole ohjattavissa, on tyypillistä, ettei ohjaus vaikuta silloin kaikkiin sen tilakomponenttien liikkeisiin (Hakkala, Ylinen, 1980, s. 92). Ohjattavuutta heikompi vaatimus on stabiloituvuus. Systeemi on stabiloituva (engl. *stabilizable*), jos kaikki ei-ohjattavat tilat ovat stabiileja, eli mielivaltaisen tilan $\mathbf{x}(t)$ sijasta voidaan saavuttaa origo.

Systeemi on tarkkailtava (engl. *observable*), jos on mahdollista määrittää alkutila $\mathbf{x}(t_0)$ havaintojen $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ perusteella äärellisessä ajassa (Dorf, Bishop, 2004, s. 663), (Ylén, 2009, luento 6). Koska ei-tarkkailtavat tilat muodostavat tarkkailtavuusmatriisin

$$\mathbf{M}_o = [\mathbf{C} \mid \mathbf{CA} \mid \mathbf{CA}^2 \mid \dots \mid \mathbf{CA}^{n-1}]^T \quad (7)$$

nolla-avaruuden, on järjestelmä tarkkailtava, jos ja vain jos tarkkailtavuusmatriisin rangi on n (Glad, Ljung, 2000, s. 45). Tarkkailtavuus on mitta sille, että järjestelmän ulostulo riittää kuvaamaan järjestelmän tilan liikkeitä (Hakkala, Ylinen, 1980, s. 85). Tarkkailtavuutta heikompi vaatimus on havaittavuus. Systeemi on havaittava (engl. *detectable*), jos kaikki ei-tarkkailtavat tilat ovat stabiileja.

3.4 Tilatarkkailija

Tilatarkkailija on systeemi, joka mallintaa todellista systeemiä, jotta se voisi estimoida sen sisäisiä tiloja. Estimointi tapahtuu todellisen systeemin annetuista ohjauksista ja mittauksista tunnetun prosessimallin avulla. Seuraavaksi esitellään tilatarkkailijan perusidea (alaosio 3.4.1), jota sitten laajennetaan koskemaan kohinaisia tapauksia (alaosio 3.4.2). Lopuksi alaosiossa 3.4.3 käsitellään vahvistusmatriisin valintaa.

3.4.1 Tilatarkkailijan periaate

Tilatarkkailijaa voidaan siis käyttää, kun halutaan tehdä normaali tilatakaisinkytkentä $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, mutta kaikki tilat eivät ole mitattavissa. Tilatarkkailija on myös toimiva säätöön sulautettuna, sillä se ja itse säädin voidaan suunnitella itsenäisesti toisistaan riippumatta. (Ylén, 2009, luento 6)

Oletetaan, että fyysinen systeemi voidaan viedä normaaliin tilaesitysmuotoon

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (8)$$

Oletetaan lisäksi, että \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} ja \mathbf{D} ovat aikainvariantteja. Selvästi tarkkailijan tulee sisältää prosessin malli, jotta estimaatti käyttäytyisi samoin kuin prosessikin. Lisäksi tarvitaan lisätermi, joka pyrkii ajamaan estimoidun tilan ja todellisen tilan välisen erotuksen nollaan. Tilavektoreita ei tosin voida vähentää, sillä todellisen prosessin kaikkia tiloja ei saada mitattua. Sen sijaan voidaan hyödyntää lähtömatriisia \mathbf{C} ja vähentää todelliset mittaukset estimoiduista mittauksista. Näin tilatarkkailijaksi saadaan

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_e(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_e\mathbf{y}, \quad (9)$$

missä vahvistusmatriisi \mathbf{K}_e valitaan siten, että tilavektoreiden välinen erosuure suppenee ajan kasvaessa. Tämän ehdon toteuttavat matriisit \mathbf{K}_e , joilla matriisin $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosa on negatiivinen. Tämä nähdään vähentämällä tilatarkkailijan yhtälö (9) todellisen systeemin yhtälöstä (8), jolloin erosuurelle $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ saadaan

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}. \quad (10)$$

(Anderson, Moore, 1989, s. 168-169) Mikäli systeemi on asympotoottisesti stabiili, virhe konvergoituu nollaan riippumatta estimaatin alkuarvosta. Tosin käytännössä estimaatti ja todellinen tila eivät ole samoja johtuen mallivirheistä ja mittauskohinasta.

Ylläesitetty teoria koskee tapauksia, joissa muodostetaan koko tilavektori. Mikäli mittauksia kuitenkin halutaan käyttää suoraan tarkkailijan vastaavina ulostuloina ja estimoida vain puuttuvia tiloja, voidaan käyttää minimikertalukua olevaa tarkkailijaa. Tällaista tarkkailijaa kutsutaan redusoidun kertaluvun tilatarkkailijaksi (engl. *reduced order observer*). (Franklin et al., 1998, s. 299) Sen etuna on mallivirheiden parempi sieto, sillä se ei yritä ennustaa suoraan mitattavia tiloja (virheellisen) mallin avulla (Anderson, Moore, 1989, s. 175-176). Redusoitu tilatarkkailija on kuitenkin herkkä mittauskohinalle, sillä se ei suodata sitä lainkaan, toisin kuin täyden kertaluvun tarkkailija. Toisaalta jos mittaukset ovat kohinattomia, on näiden tilojen estimointi turhaa. Yleensä on kuitenkin toivottavaa, että kohina kulkee alipäästösuotimena toimivan täyden kertaluvun tilatarkkailijan lävitse, koska tällöin mittauksen korkeat taajuudet eivät pääse vaikuttamaan estimaattiin. (Franklin et al., 2006, s. 402), (Glad, Ljung, 2000, s. 125) Tästä syystä redusoidun tilatarkkailijan tarkastelu sivuutetaan.

3.4.2 Kohinan esittely tilatarkkailijaan

Tarkastellaan kohinan vaikutusta tilatarkkailijan toimintaan. Kohinalla tarkoitetaan signaalia, joka summautuu käsiteltävään signaaliin. Sitä syntyy useista lähteistä, mm. antureiden mittausepävarmuudesta, prosessin mallivirheistä ja ulkoisista häiriöistä. Tyypillisesti mittaukseen liittyvä kohina on korkeataajuisia ja prosessiin liittyvät häiriöt matalataajuisia. Kohinaa voidaan tarkastella matemaattisesti käsittelemällä sitä satunnaisena signaalina, jolla on tunnetut tilastolliset ominaisuudet.

Kohina voi vaikuttaa sekä tiloihin että suoraan mittaukseen. Tilaesitys on tällöin muotoa

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} + \mathbf{w} . \end{cases} \quad (11)$$

Kohinoiden \mathbf{v} ja \mathbf{w} oletetaan olevan valkoista, normaalijakautunutta ja nollakeskiarvoista. Kohinat ovat myös toisistaan riippumattomia eli keskenään korreloimattomia ja niillä on tunnetut kovarianssit. Valkoisuus tarkoittaa, että kohina on korreloimatonta itsensä kanssa eri ajanhetkillä. Tehdyt oletukset matemaattisesti esitettynä ovat

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)] &= \mathbf{Q}_k(t)\delta(t-\tau), & E[\mathbf{v}(t)] &\equiv \mathbf{0}, \\ E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] &= \mathbf{R}_k(t)\delta(t-\tau), & E[\mathbf{w}(t)] &\equiv \mathbf{0}, \\ E[\mathbf{v}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] &= \mathbf{0}, \forall t, \tau \end{aligned}$$

intensiteeteilla \mathbf{Q}_k ja \mathbf{R}_k . Matriisi \mathbf{Q}_k on symmetrinen ja positiivisemidefiniitti, kun matriisin \mathbf{R}_k tulee puolestaan olla symmetrinen ja positiividefiniitti. (Anderson, Moore, 1989, s. 180-181)

Kohinaisen tilatarkkailijan malli on aivan vastaava kuin kohinattomassa tapauksessa. Sen sijaan estimointivirheelle saadaan

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{v} - \mathbf{K}_e\mathbf{w} . \quad (12)$$

Mikäli mittaus \mathbf{y} tai ohjaus \mathbf{u} on kohinainen, tarkkailijan antama estimaatti on myös kohinainen. Estimaatin kohinaisuus riippuu matriisin \mathbf{K}_e suuruudesta. Toisaalta suuruus vaikuttaa erosuureen suppenemisnopeuteen. Pieni \mathbf{K}_e poistaa antureiden kohinan, mutta tarkkailijasta tulee hidas eikä se seuraa vastetta kovinkaan hyvin, jos prosessiin vaikutetaan huonosti tunnetuilla syötteillä tai se sisältää mallinnusvirheitä. Toisaalta mitä kauemmas vasempaan puolitasoon matriisin $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ navat viedään eli mitä nopeammin erosuureen halutaan suppenevan ja prosessihäiriöiden kuolevan, sitä voimakkaammaksi tilaestimaatin kohina tulee. Näin ollen kohina asettaa ylärajan erosuureen suppenemisnopeudelle. Suunnittelijan onkin tehtävä kompromissi (engl. *trade-off*) estimaatin nopeuden ja kohinan aiheuttaman suorituskyvyn laskun välillä. (Anderson, Moore, 1989, s. 171), (Franklin et al., 1998, s. 47), (Glad, Ljung, 2000, s. 125)

3.4.3 Vahvistusmatriisin valitseminen

Tähän saakka on esitetty tilatarkkailijan periaate ja keskusteltu yleisesti, kuinka siihen kuuluva vahvistusmatriisi \mathbf{K}_e tulisi valita. Seuraavaksi esitetään, kuinka tämän matriisin laskenta suoritetaan.

Kohinattomille järjestelmille vahvistusmatriisi \mathbf{K}_e saadaan määritettyä asettamalla tarkkailijan navat haluttuihin kohtiin β_i

$$\alpha_e(s) \triangleq (s - \beta_1)(s - \beta_2) \cdots (s - \beta_n) \quad (13)$$

ja vertaamalla saatua yhtälöä virheen karakteristiseen yhtälöön

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0, \quad (14)$$

joka saadaan virheen lausekkeesta (10). (Franklin et al., 1998, s. 46)

Napojen sijoittelu onnistuu mielivaltaisesti, jos järjestelmä on ohjattava. Tarkkailtavuus takaa, että matriisin \mathbf{K}_e ratkaisu on yksikäsitteinen. (Dorf, Bishop, 2004, s. 660-661) Jos järjestelmässä on vain yksi tulo, ratkaisemiseen voidaan käyttää Ackermannin menetelmää, jonka esimerkiksi Åström ja Wittenmark ovat esittäneet kirjassaan (1997, s. 125-126). Näin suunnittelijan ainoaksi tehtäväksi jää päättää tarkkailijan dynamiikka. Kun tarkkailija sijoitetaan säätösilmukkaan, on kannattavaa valita tarkkailijan navat nopeammiksi kuin säätimen navat, jotta suljettua silmukkaa dominoisivat säädön navat. Yleinen ohje on valita tarkkailijan navat 2-6 kertaa nopeammiksi kuin säädön navat. Jos tämä valinta aiheuttaa tilaestimaattiin liikaa kohinaa, voidaan myös käyttää hitaampia napoja, mutta tällöin tarkkailijan navoilla voi olla selvä vaikutus kokonaisvasteeseen, mikä puolestaan hankaloittaa säädön suunnittelua. (Franklin et al., 1998, s. 47, 309)

Edellä esitetty tarkastelu ei huomioi millään lailla kohinaa. Mikäli järjestelmässä kuitenkin on kohinaa ja kohinan intensiteetti tunnetaan, voidaan vahvistusmatriisin valinta edellä esitettyyn kompromissiin nähden tehdä optimaalisesti. Tällä tavalla matriisien \mathbf{Q}_k ja \mathbf{R}_k funktiona valittua vahvistusmatriisia kutsutaan Kalman-suotimeksi. (Anderson, Moore, 1989, s. 179), (Franklin et al., 1998, s. 47)

Kalman-suodin määrittää, kuinka paljon painotetaan mittausta ja kuinka paljon tilatarkkailijan antamaa estimaattia. Tämä painotus riippuu mittauksen ja estimaatin luotettavuuksista, joiden mittareina toimivat kohinoiden kovarianssit. Esimerkiksi, jos mittauskohinan intensiteetti \mathbf{R}_k on suuri ja prosessikohinan intensiteetti \mathbf{Q}_k pieni, käytetään pientä vahvistusta. (Virtanen, 2008, luento 5)

Kalman-suotimen johtamiseen tarvitaan varsin paljon matematiikkaa. Seuraavassa esitetään vain keskeisimmät tulokset vahvistusmatriisin laskemiseksi. Itse asiassa tarkempi matemaattinen käsittely tehdään osiossa 4.1, sillä Kalman-suodin on muotoiltavissa samaksi ongelmaksi kuin kyseisessä osiossa käsiteltävä LQR-säädin.

Tätä läheistä yhtäläisyyttä Kalman-suotimen ja LQR-säätimen välillä kutsutaan duaalisuudeksi (Anderson, Moore, 1989, s. 194).

Yleistetyssä aikavariantissa tapauksessa vahvistusmatriisi lasketaan kaavalla

$$\mathbf{K}_e(t) = \mathbf{P}_e(t) \mathbf{C}^T(t) \mathbf{R}_k^{-1}(t), \quad (15)$$

jossa symmetrinen positiivisemidefiniitti matriisi \mathbf{P}_e kuvaa estimointivirheen kovarianssia

$$\mathbf{P}_e(t) = E\left\{[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)][\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)]^T\right\} \quad (16)$$

ja lasketaan Riccatin yhtälöstä

$$\dot{\mathbf{P}}_e(t) = \mathbf{P}_e(t) \mathbf{A}^T(t) + \mathbf{A}(t) \mathbf{P}_e(t) - \mathbf{P}_e(t) \mathbf{C}^T(t) \mathbf{R}_k^{-1}(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{P}_e(t) + \mathbf{Q}_k(t) \quad (17)$$

alkuarvolla $\mathbf{P}_e(t_0) = \mathbf{P}_0$. (Anderson, Moore, 1989, s. 191) Näin valittu vahvistusmatriisi minimoi kriteerin (16) ja tunnetaan siis nimellä Kalman-suodin. Lisäksi vaaditaan, että $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ on tarkkailtava. Ilman tätä vaatimusta vahvistusmatriisin jotkin, tai kaikki, alkiot saattavat kasvaa äärettömiksi.

Pitämällä $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ aikainvarianttina riittää edelliseksi ehdoksi havaittavuus. Mikäli tämän lisäksi kohinat ovat stationaarisia eli niiden stokastiset ominaisuudet eivät riipu ajasta, ovat myös matriisit \mathbf{Q}_k ja \mathbf{R}_k vakioarvoisia, samoin kuin kovarianssimatriisi \mathbf{P}_e . Tällöin matriisin \mathbf{P}_e vakioarvo saadaan laskettua Riccatin yhtälöstä (17) alkuarvolla $\mathbf{P}_0 = \mathbf{0}$ antamalla ajan lähestyä ääretöntä. Näin \mathbf{P}_e on ratkaisu algebralliseen Riccatin yhtälöön

$$\mathbf{P}_e \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{P}_e - \mathbf{P}_e \mathbf{C}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_e + \mathbf{Q}_k = \mathbf{0}. \quad (18)$$

Siten aikainvariantissa tapauksessa myös vahvistusmatriisi \mathbf{K}_e on vakio ja saadaan yhtälöstä

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{P}_e \mathbf{C}^T \mathbf{R}_k^{-1}. \quad (19)$$

Kun vielä ohjausmatriisia \mathbf{B} pidetään vakiona, saadaan tilatarkkailija edellä esitettyyn muotoon (9). Virheen suppenemiseksi matriisin $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$ vaaditaan olevan asymp-
toottisesti stabiili. Tämän varmistamiseksi vaaditaan, että $[\mathbf{A}, \mathbf{E}]$, jossa \mathbf{E} on mikä tahansa matriisi siten, että $\mathbf{E} \mathbf{E}^T = \mathbf{Q}_k$, on stabiloituva. (Anderson, Moore, 1989, s. 195-196)

Mikäli prosessikohinalla \mathbf{v} ja mittauskohinalla \mathbf{w} on keskinäistä korrelaatiota vastoin alussa tehtyä oletusta, tulee Riccatin yhtälöön (18) ja vahvistusmatriisin laskentakaavaan (19) lisätä ristikorrelaatiotermi (Glad, Ljung, 2000, s. 128).

4 Säätorakenteita

Tämän luvun säätorakenteina käsitellään tilasäädin ja PID-säädin. Kumpikin säädin perustuu napojenasettelumenetelmiin, mutta niiden esiteltävät viritysmenetelmät eroavat kuitenkin toisistaan olennaisesti. Toki muitakin säätimiä on olemassa. Työssä on kuitenkin rajattu pois kaikki siirtofunktio- ja siirtoluvuun perustuvat ja samalla suurin osa taajuustasoon perustuvista säätimistä, sillä kuormauselimen dynamiikkaa (ks. luku 6) on hankala kuvata Laplace-tasossa. Toinen vaihtoehto olisi kuvata dynamiikkaa paljon yksinkertaisemmin, jolloin laaja kirjo siirtofunktio- ja siirtoluvuun perustuvia säätimiä olisi käytettävissä. Tämä tuntuu kuitenkin turhalle, sillä myös tarkemmalle mallille saadaan suunniteltua säätimiä, jolloin myös säätötulos on oletettavasti parempi.

Osiossa 4.1 esitellään tilasäätö, joka on luonnollisin tapa säätää prosessia, joka on esitetty tilaesityksenä ja jonka tilat ovat mitattuja tai estimoituja (Zenger, 2006, luento 4). Prosessin tilasuureiden manipulointi tilasäätimellä mahdollistaa paremman systeemin hallinnan verrattuna systeemin pelkkien lähtösuureiden ohjaamiseen (Ylén, 2009, luento 2). Tilasäätö on mallipohjaista säätösuunnittelua, sillä navat sijoitetaan analyttisesti haluttuihin paikkoihin prosessin tilaesitystä hyödyntäen. Monimutkaisia MIMO-systeemejä, kuten kuormauselintä, varten esitellään LQ-optimisäätö, jolla napojenasettelu onnistuu helposti hankalillekin prosesseille.

Osiossa 4.2 vuorostaan esitellään PID-säädin, joka on kaikkein yleisin syöte-vaste-säädin eli säädin, joka tarkastelee ainoastaan prosessin tuloja ja lähtöjä eikä huomioi prosessin sisäisten tilojen keskinäisiä riippuvuuksia (Ylén, 2009, luento 6). Myös PID-säädin voidaan viritellä mallipohjaisesti siirtofunktioiden avulla, mutta tässä työssä se viritetään ainoastaan kokeellisesti simuloiden, koska kyseisen säätimen analyttiset viritysmenetelmät eivät sovellu hyvin monimutkaisiin prosesseihin. Muista vastaavista säätimistä tunnetuin lienee sumea säätö. Tätä ei ole sisällytetty työhön, koska se on vahvoilla esimerkiksi epälineaaristen prosessien säädössä, muttei tuone hyötyä tarkasteltavaan ongelmaan.

Lopuksi osiossa 4.3 määritetään viiveiden eri tyypit ja käsitellään lyhyesti niiden vaikutusta säätöongelmaan.

4.1 Tilasäätö

Regulointia eli prosessin viemistä nollatilaan käsitellään alaosiossa 4.1.1. Jotta prosessi saataisiin johonkin muuhun tilaan, täytyy haluttu tila tuoda jotenkin säätöpiiriin. Eri tapoja tämän toteuttamiseksi käsitellään alaosiossa 4.1.2.

Alaosio 4.1.3 käsittelee säädinmatriisien optimaalista valintaa neliöllisen kustannuskriteerin minimoinnin mielessä. Menetelmää käytetään etenkin monimuuttajasysteemeihin, sillä näille systeemeille napojen sijoittelu voi olla muutoin hankalaa. Tilasäätöä käsittelevän luvun viimeisessä alaosiossa 4.1.4 säätimeen lisätään

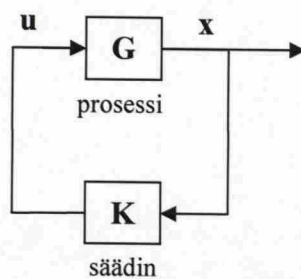
integroiva osuus, jonka ansiosta säädetty ulostulo asettuu haluttuun arvoon pysyvästä poikkeamasta, mallin epätarkkuudesta ja prosessiin vaikuttavista häiriöistä huolimatta.

4.1.1 Regulointi

Oletetaan, että systeemi saadaan esitettyä tilaesitysmuotona

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (20)$$

Oletetaan lisäksi, että alkutilanteessa systeemin jokin tila tai jonkin tilan derivaatta eroaa nolasta. Tehtävänä on muodostaa syöte siten, että systeemi ajautuu nolatilaa eli tilaan, jossa sen kaikki tilat ja niiden derivaatat ovat nollia. Tällaista tavoitetta kutsutaan regulointitehtäväksi. Regulaattorin lohkokkaavio on esitetty kuvassa 8.

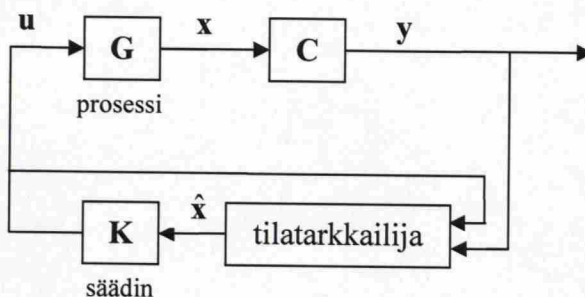


Kuva 8: Regulaattori

Reguloinnissa ohjaus muodostetaan siis koko tilavektorista kertomalla sitä säädinmatriisilla \mathbf{K} kaavan (21) mukaisesti

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t), \quad (21)$$

jossa koko tilavektorin \mathbf{x} oletetaan olevan mitattavissa. Mikäli näin ei ole tai prosessi sisältää kohinaa, voidaan muodostaa osiossa 3.4 esitelty tilatarkkailija, jolloin ohjaus on muotoa $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)$ kuvan 9 mukaisesti. Tehtäväksi jää valita matriisi \mathbf{K} siten, että säädetyn systeemin dynamiikka on haluttu. (Anderson, Moore, 1989, s. 8-9)



Kuva 9: Regulaattori ja tilatarkkailija samassa piirissä

Tilasäädinmatriisi \mathbf{K} valitaan samanhenkisesti tilatarkkailijan vahvistusmatriisin kanssa. Sijoittamalla ohjaus (21) tilaesitykseen (20) saadaan säädetyn järjestelmän karakteristinen yhtälö laskettua determinantin avulla

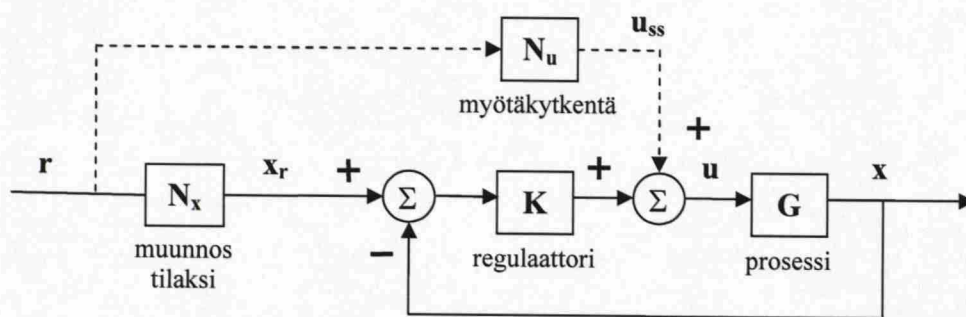
$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}| = 0. \quad (22)$$

Yhtälön juuret ovat suljetun silmukan systeemimatriisin ominaisarvot. Ominaisarvot määräävät säädetyn järjestelmän käyttäytymisen ja niiden tulee olla kompleksitason vasemmassa puolitasossa, jotta suljettu silmukka olisi stabiili. Vertaamalla yhtälön (13) kertoimia tällä kertaa yhtälöön (22) saadaan matriisi \mathbf{K} määrättyä. Monimuuttujasysteemeissä matriisin määrittäminen ei ole tällä menetelmällä yksikäsitteistä ja päätös napojen sijoittamisesta voi olla hankalaa. Siksi tämä menetelmä sopii vain alhaista kertalukua olevien systeemien käsittelyyn. Lisäksi se ei huomioi ohjauksista aiheutuvaa kustannusta millään lailla. (Franklin et al., 1998, s. 42-43, 359) Kehittyneempi tapa matriisin \mathbf{K} valitsemiseksi esitetään myöhemmin alaosiossa 4.1.3.

4.1.2 Referenssin tuominen systeemiin

Edellisessä alaosiossa käsiteltiin reguloititehtävää, jossa tavoitteena oli ajaa systeemi nollatilaan. Tällainen tilanne on kuitenkin vain erikoistapaus laajemmasta tehtävästä, jossa tavoitteena on seurata haluttua referenssiä eli asetusarvoa. Toisin sanoen reguloititehtävässä referenssinä on nollavektori ja servotehtävässä jokin nollasta poikkeava, mahdollisesti dynaamisesti muuttuva vektori \mathbf{x}_r . Referenssi voidaan esitellä kuvaan 8 joko tilavektorin (vaihtoehto 1) tai ohjauksen yhteyteen (vaihtoehto 2).

Tarkastellaan ensin vaihtoehtoa 1, joka on esitetty kuvassa 10. Matriisi \mathbf{N}_x muuntaa referenssin \mathbf{r} halutuksi referenssitilaksi \mathbf{x}_r . Matriisi \mathbf{N}_x valitaan siten, että systeemin ulostulo $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ on haluttu referenssi \mathbf{r} . (Franklin et al., 1998, s. 310)



Kuva 10: Vaihtoehto 1 referenssin tuomiseksi

Regulaattori \mathbf{K} pyrkii ajamaan sille tuodun erosuureen nollaan. Tämä toimii hyvin, kun kyseessä on integroiva prosessi, esimerkiksi lineaariliike, jolloin toimintapisteellä ei ole ratkaisevaa merkitystä. Tällöin nimittäin origo voidaan siirtää referenssipisteeseen, ja on siis sama asia ajaa prosessi paikkaan nolla kuin esimerkiksi paikkaan s . Kummassakin tapauksessa ohjauksen halutaan olevan nolla tavoitepisteessä, mikä toteutuu, sillä

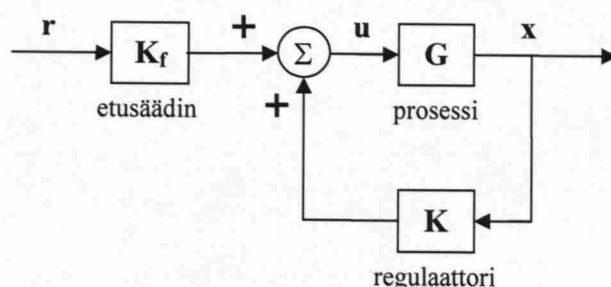
erosuure on nolla. Toisaalta säätö ei toimi ei-integroivissa prosesseissa. Esimerkiksi heiluriliikkeessä tavoitetilassa tarvitaan jokin nollasta poikkeava ohjaus, kun kulman referenssi poikkeaa nollasta. Tällöin saavutettaessa haluttu kulma ohjaus menisi hetkellisesti nollaan, josta edelleen seuraisi, ettei heiluri pysyisi tavoitepisteessä. Käytännössä tällainen systeemi saavuttaa jonkin referenssistä poikkeavan tasapainotilan.

Koska systeemin ulostuloon voi jäädä pysyvä poikkeama referenssin askelmaisella muutoksella, voidaan säätimen rinnalle lisätä lopputilan ohjaustermi $u_{ss} = N_u r$, joka on myötäkytkentä referenssistä ja verrannollinen askeleen suuruuteen. Mikäli ohjauksia on yhtä paljon kuin mittauksia, vahvistukset N_x ja N_u saadaan laskettua yhtälöstä

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Osoittautuu, että matriisin N_u arvo ei-integroivilla prosesseilla on prosessin vahvistuksen käänteisluku. Käytännössä kuitenkin prosessin vahvistus voi vaihdella huomattavasti. Siksi kyseistä säädinrakennetta käytetään harvoin, sillä parempana menetelmänä pysyvän poikkeaman eliminoinemiseksi pidetään integroivaa säätöä, jota käsitellään erikseen alaosiossa 4.1.4. Säädin on kuitenkin ainoa valinta tapauksissa, joissa anturilta saadaan ainoastaan erosuure absoluuttisen arvon sijaan. Tosin integrointia tarvitaan tällöinkin häiriöiden ja mallivirheiden poistamiseen. (Franklin et al., 1998, s. 311-314)

Toinen toimiva tapa referenssin esittelemiseksi on sijoittaa regulaattori takaisinkytkentähaaraan ja käyttää referenssille omaa säädintä kuvan 11 mukaisesti.



Kuva 11: Vaihtoehto 2 referenssin tuomiseksi

Itse asiassa säädin on täsmälleen sama kuin kuvan 10 säädin, jos valitaan $K_f = N_u + KN_x$ (Franklin et al., 1998, s. 313). Luonnollisesti valitsemalla K_f toisin saadaan toteutettua vaihtoehdosta 1 eroava säädin. Matriisin K_f valintaa käsitellään seuraavassa alaosiossa. Tämäkin säädinrakenne jättää ulostuloon pysyvän poikkeaman, joka voidaan poistaa käyttämällä integraalia.

Järjestelmä saadaan myös asettumaan haluttuun tilaan yhdistämällä pelkästään regulaattori ja integraali. Referenssiä kertovan termin käyttäminen on kuitenkin

kannattavaa, koska sillä on ennakoiva vaikutus ohjaukseen, jolloin säädöstä tulee näin hieman pehmeämpi.

4.1.3 Säädinmatriisien valitseminen LQ-menetelmällä

Edellisessä alaosiossa lyhyesti esitellyt ns. klassisen säädön menetelmät ovat hyvin tunnettuja ja niitä käytetäänkin yleisesti erilaisissa säätöratkaisuisissa. Tällaisten sovellusten prosessit ovat yleensä lineaarisia, aikainvariantteja SISO-systeemejä. Ensisijaisena tavoitteena on stabiloida prosessi ja toissijainen tavoite voi koostua joidenkin asetettujen kriteerien, kuten tietyn taajuuskaistan, robustisuuden tai häiriönsietokyvyn, saavuttamisesta. Suunnittelumenetelmät ovat yhdistelmä analyttisiä (esim. Laplace-muunnos), graafisia (esim. Boden diagrammi) ja empiirisiä menetelmiä (esim. operaattorin tietämys).

Klassiset menetelmät muuttuvat kuitenkin nopeasti riittämättömiksi, kun prosessi on korkeaa astetta, siinä on monta tuloa, se on epälineaarinen tai se ei muuten täytä yleisesti tehtyjä oletuksia. Tällaisia ongelmia varten on kehitetty moderni säätösuunnittelu. Sen yksi erityisen mielenkiintoinen haara on optimisäätö. Optimisäädön nimi juontaa siitä, että siinä etsitään säätölaki siten, että tietty optimaalisuuskriteeri täyttyy. Optimisäädöllä saatu systeemi ei ole pelkästään stabiili ja toteuta tiettyjä annettuja rajoituksia, vaan systeemin pitäisi olla paras mahdollinen ratkaisu annettuun ongelmaan.

Optimisäädön eräs erityistapaus on lineaarinen optimisäätö. Siinä prosessin oletetaan olevan lineaarinen ja tämän ohella säädin rajoitetaan lineaariseksi. Tällainen lineaarinen säädin on helpompi toteuttaa käytännössä kuin epälineaarinen, mutta on kuitenkin useimmiten täysin riittävä. Lineaarinen säädin suunnitellaan minimoimalla kustannuskriteeriä, joka muodostetaan painotetuista neliöllisistä ohjauksista ja erosuureista. Siksi lineaarista optimisäätöä kutsutaan LQ-säädöksi (engl. *linear-quadratic control*). Säätösuunnittelu tapahtuu yksinkertaisesti varioimalla jokaisen erosuureen ja ohjauksen painotuksen suhteellista suuruutta, kunnes toivottu käyttäytyminen on saavutettu. Käytettävä kustannuskriteeri voi sisältää myös termin, jossa erosuuretta kerrotaan ohjauksella. Tällaisen ristikkäistermin sisältävän kustannuskriteerin käsittely sivuutetaan seuraavassa tarkastelussa, mutta on tarvittaessa helppo johtaa esitettävän teorian pohjalta. (Anderson, Moore, 1989, s. 1-2)

Kohinaisille prosesseille sekä prosesseille, joiden kaikkia tiloja ei saada mitattua, LQ-säädön sijasta puhutaan LQG-säädöstä (engl. *linear-quadratic-Gaussian*). LQG-säätöprobleema ratkaistaan yksinkertaisesti yhdistämällä LQ-säädin ja Kalman suotimen antama tilaestimaatti. Separaatioperiaatteen (engl. *separation principle*) mukaan nämä probleemat voidaan ratkaista toisistaan riippumatta. (Glad, Ljung, 2000, s. 243), (Zenger, 2008, luennot 5, 10)

Alaosioissa 4.1.3.1 ja 4.1.3.2 esitellään regulointi lineaarisella optimisäädöllä eli LQR-säätö (engl. *linear-quadratic regulator*). Nämä tulokset eivät sellaisinaan ole tämän työn tavoitteisiin riittäviä, mutta alaosioissa 4.1.3.3 ja 4.1.3.4 käsiteltävät, annettua

referenssiä seuraavat servosäätimet pohjautuvat vahvasti näihin tuloksiin. Alaosiossa 4.1.3.5 annetaan ohjeita säätimen painomatriisien valintaan.

4.1.3.1 Äärellisen ajan regulaattori

Oletetaan, että systeemi noudattaa normaalia tilaesitysmuotoa (20). Säätimen suunnitellun lähtökohtana on tavoite muodostaa sellainen ohjaus, joka vie mielivaltaisen alkutilan nollatilaan, ja tämän tulisi tapahtua mielellään mahdollisimman nopeasti. Itse asiassa, mikäli ohjaussuureet olisivat äärettömiä, tämä tilamuunnos voitaisiin tehdä mielivaltaisessa ajassa. Käytännössä äärelliset ohjaukset asettavat kuitenkin ylärajan nopeudelle. Vaikka suuriakin ohjauksia olisi mahdollista käyttää, on ohjauksella todennäköisesti jokin hinta. Samoin eksaktin lopputilan sijasta voidaan pyrkiä vain tarpeeksi lähelle sitä. Lisäksi on edullista pitää tilat lähellä nolaa koko säädön ajan. Näitä kolmea kriteeriä voidaan painottaa painomatriiseilla \mathbf{Q} , \mathbf{R} ja \mathbf{S}_f . Näin säädölle saadaan muotoiltua neliöllinen kustannuskriteeri

$$V(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}, t_0) = \int_{t_0}^T (\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}) dt + \mathbf{x}^T(T) \mathbf{S}_f \mathbf{x}(T), \quad (24)$$

missä yleisyyttä rajoittamatta \mathbf{Q} ja \mathbf{R} valitaan symmetrisiksi positiividefiniiteiksi matriiseiksi ja \mathbf{S}_f positiivisemidefiniitiksi matriisiksi. Termi T kuvaa loppuaikaa. Kustannuskriteerin (24) kautta alkuperäinen säätöongelma muuttuu tehtäväksi löytää optimaalinen ohjaus \mathbf{u}^* , joka minimoi kyseisen kriteerin tuottaen optimaalisen kustannuksen V^* .

Kustannuskriteerin minimointi on johdettu liitteessä A. Johdossa minimointiin sovelletaan Bellmanin optimaalisuuden periaatetta (engl. *principle of optimality*) ja Hamilton-Jacobi-Bellman-osittaisdifferentiaaliyhtälöä. Lopputuloksena optimaalinen kustannus, mikäli sellainen on olemassa, on muotoa

$$V^*(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t), \quad (25)$$

missä \mathbf{P} voidaan yleisyyttä rajoittamatta valita symmetriseksi. Edelleen optimaalinen lineaarinen ohjaus on

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t), \quad (26)$$

jossa matriisille \mathbf{P} saadaan

$$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t), \quad (27)$$

jonka havaitaan olevan Riccatin yhtälö reunaehdolla $\mathbf{P}(T, T) = \mathbf{S}_f$. (Anderson, Moore, 1989, s. 21-22) Optimaalinen ohjaus (26) pätee myös kohinaiselle systeemille (11), sillä ohjauksella ei voida vaikuttaa kohinatermiin (Glad, Ljung, 2000, s. 242).

4.1.3.2 Äärettömän ajan regulaattori

Tarkastellaan edelleen systeemiä (20). Samoin edelleen halutaan muodostaa optimaalinen ohjaus \mathbf{u}^* , joka vie tilat mahdollisimman nopeasti nollaan huomioiden kuitenkin ohjausten kustannukset. Tehtävän asettelu eroaa edellisessä alaosiossa esitettyyn siinä, että säädöllä ei varsinaisesti ole enää loppuaikaa T , vaan se pidennetään kohti ääretöntä. Enää ei siis voida rankaista väärästä lopputilasta eli asetetaan $\mathbf{S}_f = \mathbf{0}$. Kustannuskriteeri on tällöin

$$V(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}) dt. \quad (28)$$

Osoittautuu, että optimaalinen ohjaus on edelleen (26). On kuitenkin huomattava, että – toisin kuin äärellisen ajan tapauksessa, jossa kustannuskriteeri on aina äärellinen – kustannus voi kasvaa rajatta. Tämän estämiseksi ja samalla matriisin \mathbf{P} olemassaolon takaamiseksi ($V^* = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$) systeemin (20) vaaditaan olevan stabiloituva.

Äärettömän ajan regulaattorilla on eräs merkittävä etu verrattuna äärellisen ajan regulaattoriin. Jälkimmäisessä tapauksessa, vaikka \mathbf{A} ja \mathbf{B} olisivat vakioita, mikään \mathbf{Q} :n, \mathbf{R} :n ja T :n valinta ei johda vakioarvoiseen säätäjän vahvistukseen \mathbf{K} , ellei lopputilan kustannuksella \mathbf{S}_f ole jokin erityinen arvo. Sen sijaan äärettömän ajan regulaattori tuottaa ajasta riippumattoman vahvistuksen \mathbf{K} aina, kun \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Q} ja \mathbf{R} ovat vakioita. Tämä on seurausta siitä, että matriisi \mathbf{P} lasketaan tällöin algebrallisesta Riccatin yhtälöstä

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad (29)$$

joka johtaa vakioarvoiseen matriisiin \mathbf{P} , josta edelleen seuraa vakioarvoinen \mathbf{K} . (Anderson, Moore, 1989, s. 35-36, 39-40) Tällainen vakiosäädin on merkittävästi helpompi toteuttaa käytännössä ja siksi sitä käytetään tyypillisesti vaihtuva-arvoisen säätimen sijasta. (Franklin et al., 1998, s. 360).

Vakioarvoisten matriisien \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Q} ja \mathbf{R} tapauksessa riittävä ja välttämätön ehto regulaattorin tuottaman optimaalisen systeemin asympotoottisuudelle stabiiliudelle on, että $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ on stabiloituva ja että $[\mathbf{A}, \mathbf{E}]$, jossa \mathbf{E} on mikä tahansa matriisi siten, että $\mathbf{E} \mathbf{E}^T = \mathbf{Q}$, on havaittava. (Anderson, Moore, 1989, s. 48)

4.1.3.3 Äärellisen ajan servosäädin

Regulointitehtävä voi näyttää kovin rajoittuneelta ja suorastaan käyttökeltomalta useimpiin tapauksiin. Sen avulla ratkaisu käytännöllisemmälle servotehtävälle saadaan kuitenkin varsin suoraviivaisesti. Muotoillaan seuraavaksi servotehtävä ja esitetään sille ratkaisu.

Olkoon referenssitila \mathbf{x}_r ulostulo dynaamisesta mallista

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_r \mathbf{z} \\ \mathbf{x}_r = \mathbf{C}_r \mathbf{z} . \end{cases} \quad (30)$$

Muodostetaan kustannuskriteeri, joka rankaisee tilan \mathbf{x} ja referenssitilan \mathbf{x}_r erosuureesta:

$$V(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}, t_0) = \int_{t_0}^T [\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)^T \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)] dt . \quad (31)$$

Painomatriisit \mathbf{Q} ja \mathbf{R} on määritelty kuten aiemminkin. Kyseisessä kustannuskriteerissä oletetaan, että lähtömatriisi \mathbf{C} on identiteettimatriisi. Servotehtävän kustannuskriteeri (31) saadaan muotoiltua tavallisen regulointitehtävän kriteeriksi valitsemalla tilaesityksen matriiseiksi

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & -\mathbf{Q}\mathbf{C}_r \\ -\mathbf{C}_r^T \mathbf{Q} & \mathbf{C}_r^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_r \end{bmatrix} \quad (32)$$

ja uudeksi tilavektoriksi

$$\mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

jolloin servotehtävän ratkaisu on siis

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{P}} \mathbf{x}_m . \quad (34)$$

Matriisi $\hat{\mathbf{P}}$ saadaan määrättyä yhtälöstä (34) mainituilla uusilla matriiseilla ja se on muotoa

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

jossa matriisille \mathbf{P}_{12} saadaan johdettua Riccatin yhtälö

$$-\dot{\mathbf{P}}_{12} = \mathbf{P}_{12} \mathbf{A}_r + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{12} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{12} - \mathbf{Q} \mathbf{C}_r, \quad \mathbf{P}_{12}(T) = \mathbf{0} . \quad (36)$$

Sijoittamalla matriisit (32), (35) ja vektori (33) ohjauksen yhtälöön (34) saadaan

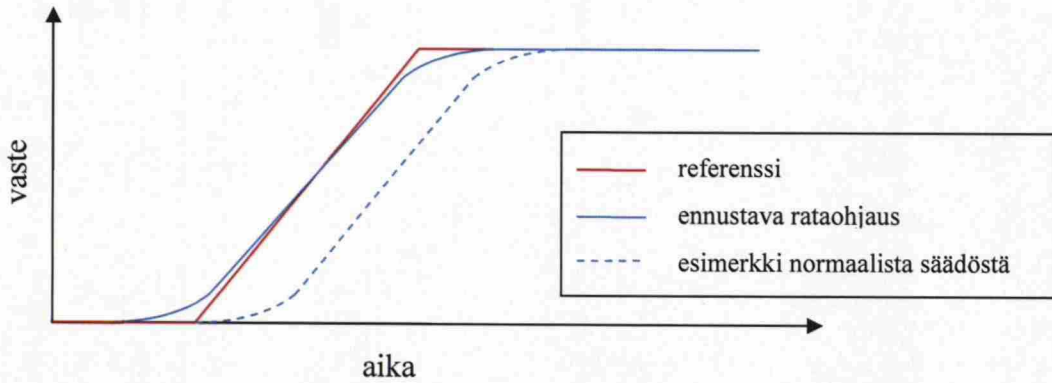
$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{12} \mathbf{z} = \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{K}_r \mathbf{z} . \quad (37)$$

(Anderson, Moore, 1989, s. 69-73) Optimaalinen servo-ohjaus on siis normaalin regulaattorin ja referenssistä muodostuvan ohjauksen summa kuvan 11 mukaisesti. Nämä ohjaukset ovat toisistaan riippumattomia.

Mikäli lisäksi trajektoria \mathbf{x}_r on tiedossa etukäteen kaikilla ajanhetkillä (tai riittävän pitkällä), jolloin puhutaan rata-ajosta (engl. *tracking*), voidaan yhtälöstä (36) muodostaa vektorille $\mathbf{b} = \mathbf{P}_{12}\mathbf{z}$ yhtälö

$$-\dot{\mathbf{b}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})^T \mathbf{b} - \mathbf{Q}\mathbf{x}_r, \quad \mathbf{b}(T) = \mathbf{0}. \quad (38)$$

Tämä voidaan ratkaista ajassa taaksepäin ja sijoittaa ohjauksen yhtälöön (37), jolloin ohjauksesta saadaan ennustava. (Anderson, Moore, 1989, s. 77-78, 87) Tilannetta on havainnollistettu kuvalla 12. Normaali säätö elää nykyhetkessä, jolloin se myöhästyy referenssin muuttuessa. Ennustava rataohjaus puolestaan näkee referenssin muutokset riittävän pitkällä aikahorisontilla, jolloin säätötulos on kokonaisuuden kannalta optimaalinen. Kuvan 12 esimerkkitapauksen tilanteessa tämä tarkoittaisi korjaavan ohjauksen aloittamista jo ennen referenssin muutosta.



Kuva 12: Optimaalinen rata-ajo on ennustava

4.1.3.4 Äärettömän ajan servosäädin

Laajennetaan nyt äärellisen ajan servotulokset äärettömän ajan tapaukseen. Tämä tehdään kuten aiemmin tehtiin regulaattorin tapauksessa antamalla loppuajan T kasvaa ääretöntä kohden. Kun käsittely rajoitetaan aikainvarianttiin systeemiin, vakiopainokertoimiin ja muuttumattomaan asetusarvoon, saadaan säätäjistä vakiotermien. Ohjaus on siis edelleen (37), mutta nyt myös matriisi \mathbf{P}_{12} on vakio ja saadaan laskettua yhtälöstä (38) asettamalla derivaatta nolaksi:

$$\mathbf{P}_{12} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})^T \mathbf{Q}\mathbf{C}_r = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{Q}\mathbf{C}_r. \quad (39)$$

Otetaan esimerkki referenssiin tehtävästä askelmuutoksesta, mikä on tyypillinen käytännön tilanne. Tällöin referenssiä voidaan käsitellä vakiona, jolloin $\mathbf{A}_r = \mathbf{0}$, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, $\mathbf{x}_r = \mathbf{z}$. Optimaalinen ohjaus on siten

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{Q}\mathbf{x}_r = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}_f\mathbf{x}_r. \quad (40)$$

Luodaan katsaus vielä signaalien ja kustannuskriteerin äärellisyyteen. Ensiksi matriisi \mathbf{P} pysyy rajoitettuna kuten aiemminkin. Toiseksi rajoitettu \mathbf{x}_r johtaa rajoitettuun matriisiin

P₁₂. Sen sijaan itse kustannuskriteeri kasvaa äärettömäksi, koska siinä integroidaan nolasta poikkeavaa arvoa. Lukuun ottamatta erikoistapauksia, ääretön kustannus ei ole vältettävissä. Siksi optimaalisesta säädöstä puhuminen tässä kohtaa on osittain harhaanjohtavaa. (Anderson, Moore, 1989, s. 85)

4.1.3.5 Painomatriisien valinta

LQ-säätimen virittäminen on siis yhtä kuin painomatriisien **Q**, **R** ja **S_f** alkiodien valinta. Yleensä virittäminen tehdään yritys-erehdys-menetelmällä. Menetelmä on toisaalta helppo, mutta toisaalta sillä voi olla erittäin hankalaa tuottaa hyvää säätötulosta. On myös kovin aikaa vievää valita parhaan tuloksen tuottavat alkio. Tavallisesti on riittävää valita diagonaaliset painomatriisit. Virittäminen on oleellisesti helpompaa, jos tilaesityksen tiloilla on jokin ymmärrettävä fyysinen suure, etenkin jos käytetään diagonaalisia matriiseja. Edelleen sopivien arvojen löytämisen helpottamiseksi muuttujat kannattaa skaalata siten, että niiden yksiköt ovat keskenään vertailukelpoisia. (Anderson, Moore, 1989, s. 156-157)

Virittämisen helpottamiseksi Bryson on kehittänyt menetelmän, jota käyttämällä oletettavasti saadaan parempia tuloksia lyhyemmässä ajassa verrattuna edellä mainittuun menetelmään. Käytännössä Brysonin menetelmä tuottaa vain iteroinnille perustellun aloituskohdan. Suunnittelu jatkuu painomatriiseja muokaten niin kauan, kunnes haluttu tulos on saavutettu. Tuloksella tarkoitetaan tässä yhteydessä hyväksyttävää kompromissia suljetun piirin suorituskyvyn ja ohjauksen tekemän työn välillä. (Franklin et al., 2006, s. 391)

Brysonin menetelmässä äärellisen ajan säätimelle valitaan diagonaaliset matriisit siten, että

$$q_{ii} = \frac{1}{n(T - t_0) \cdot \text{suurin hyväksyttävä arvo muuttujalle } x_i^2(t)}$$

$$r_{ii} = \frac{1}{m(T - t_0) \cdot \text{suurin hyväksyttävä arvo ohjaukselle } u_i^2(t)}$$

$$s_{f,ii} = n \cdot \text{suurin hyväksyttävä arvo lopputilalle } x_i^2(T),$$

joissa t_0 on alkuaika, T on loppuaika, n on tilamuuttujien määrä ja m on ohjausten määrä. Äärettömän ajan säätimelle ei ole lopputilan kustannusta **S_f**. Muut painomatriisit valitaan tällöin kuten edellä, mutta termi $(T - t_0)$ ohitetaan. (Anderson, Moore, 1989, s. 157)

Käsitellään vielä muutamaa painomatriisien valintaan liittyvää asiaa. Ensiksi on osoittautunut, että diagonaali-alkioihin täytyy tehdä melko suuria muutoksia – kymmenillä kertomista – saavuttaakseen oleellista vaikutusta suljetun silmukan ulostuloon (Glad, Ljung, 2000, s. 248). Toiseksi, jos **Q** on diagonaalinen, sen arvojen pienentäminen kohti nollaa johtaa systeemiin, joka toimii avoimen ohjauksen tavoin. Tämä johtuu siitä, ettei väärästä tilasta tällöin rankaista, mutta takaisinkytketty ohjaus

sen sijaan aiheuttaa kustannusta, joten sitä ei kannata käyttää. (Anderson, Moore, 1989, s. 149) Kolmanneksi, jos \mathbf{R} on lähellä nollaa, ohjaukseen tulee suuria arvoja, jotka johtavat helposti toimilaitteen saturoitumiseen (Franklin et al., 1998, s. 364). Lopuksi on syytä pitää mielessä, että olennaista painomatriisien valinnassa on alkioden keskinäinen suhde. Kasvattamalla yhtä diagonaalialkiota pienennetään toisten alkioden merkitystä.

4.1.4 Integraalin lisääminen

Integraalisäätö on kätevä menetelmä, kun halutaan eliminoida lopputilan virheet, jotka siis johtuvat joko mallintamattomista häiriöistä, tuntemattomista mallivirheistä (ja mallin epälineaarisuuksista) tai asetusarvon tuomisesta järjestelmään. Integraalitermin voidaan ajatella tuottavan jatkuvan ohjauksen, jonka avulla erosuure pidetään nollassa asetusarvossa. Tästä syystä integrointitermi yleensä sisällytetään säätöpiireihin jossakin muodossa. On myös mahdollista saada järjestelmä haluttuun asetusarvoon käyttämällä pelkästään regulaattoria ja integrointia, kuten alaosiossa 4.1.2 mainittiin.

Edellä esitetyt tilasäätimet eivät sisällä integraalia, ellei sitä varta vasten lisätä säätöpiiriin. Lisäys tehdään laajentamalla tilaesitystä yhdellä tilamuuttujalla kutakin integroitavaa tilaa kohden. (Franklin et al., 1998, s. 322-324) Uudet tilamuuttujat ovat haluttujen referenssien ja saatujen mittausten välisten erosuureiden integraaleja, jolloin siis uuden tilamuuttujan derivaatta on itse erosuure

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (41)$$

Edelleen laajennettu tilaesitys on

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_1(t) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (42)$$

Tämän jälkeen säätösuunnittelu tehdään aiemmin esitetyillä menetelmillä. Ylimääräinen termi \mathbf{r} jätetään huomiotta. (Ylén, 2009, luento 6)

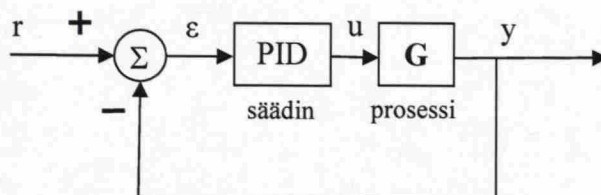
4.2 PID-säätö

PID-säädin on hyvin yleisesti käytetty säädin. Sen suosio perustuu pitkälle sen hyvään suorituskykyyn ja yksinkertaisuuteen, jonka ansiosta sen toteuttaminen ja virittäminen on helppoa. Säädin eroaa tilasäädöstä siinä, että ohjaus lasketaan halutun asetusarvon ja mitatun suureen välisestä erosuureesta. Myös muita erosuureeseen perustuvia säätimiä on olemassa ja ne eroavat toisistaan ohjauksen laskentatavalla. PID-säätimessä käytetään monesti pelkkää vahvistusta (P-osa), joka kertoo erosuuretta, mutta säädin voi ottaa huomioon myös erosuureen integraalin (I-osa) ja derivaatan (D-osa). Säätimestä voidaan muodostaa myös PI- ja PD-säätimet jättämällä vastaavasti derivointi- tai integrointiosa pois. Suunnittelijan tehtävänä on päättää, mitä muotoa säätimestä käytetään. Mainitun kolmen termin vaikutusta ohjaukseen tarkastellaan alaosiossa 4.2.1.

PID-säätimen oppikirjamuotoon tehtävää kahta käytännön modifikaatiota käsitellään alaosioissa 4.2.2 ja 4.2.3. Muutokset liittyvät vahvistusosan, integroinnin ja derivoinnin käytännön toteutukseen. Erityistä säätörakennetta, kaskadisäätöä, tarkastellaan alaosiossa 4.2.4. Säätimen kokeellisia vitysmenetelmiä esitellään alaosiossa 4.2.5.

4.2.1 P-, I- ja D-termi

Kuten mainittu, ohjaus u lasketaan erosuuretta ε kertomalla, integroimalla ja derivoimalla. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 13.



Kuva 13: PID-säädön lohkokkaavio

Ohjaus esitetään aikatasossa tyypillisesti muodossa

$$u(t) = K_P \varepsilon(t) + K_I \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + K_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (43)$$

ja vastaavasti siirtofunktiomuodossa

$$U(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) E(s), \quad (44)$$

mutta usein käytetään myös muotoa

$$U(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) E(s). \quad (45)$$

PID-säätimen eri muotojen (44) ja (45) välillä on siis yhteys

$$\begin{cases} K_P = K_c \\ K_I = K_c / T_I \\ K_D = K_c T_D \end{cases} \quad (46)$$

Termien vaikutus on pääpiirteissään seuraavanlainen. P-termin kasvattaminen nopeuttaa systeemin reagointia referenssin muutokseen, mutta aiheuttaa samalla epästabiiliutta, sillä systeemin vaimennus pienenee. I-termiä käyttämällä erosuure menee nollaan ajan myötä, eli säädettyyn arvoon ei jää pysyvää poikkeamaa, olettaen tietysti, ettei referenssi muutu. Tämä on seurausta siitä, ettei I-termin tuottama ohjaus ole verrannollinen erosuureen nykyiseen arvoon, vaan se muuttuu niin kauan kuin erosuure eroaa nollasta. Näin on myös mahdollista saada nollasta poikkeava ohjaus asetusarvossa. Ilman I-osaa säädettyyn systeemiin jää aina pysyvää poikkeamaa, ellei itse prosessi ole integroiva. Pelkällä P- tai PD-säätimellä askelkokeen pysyvä poikkeama ei-integroivalla prosessilla on kääntäen verrannollinen P:n suuruuteen. Integroinnin huonona puolena on, että se aiheuttaa vasteeseen värähtelyä, jolloin asettumisaika pitenee. D-termi on puolestaan luonteeltaan ennustava. Sen tarkoituksena on parantaa säädetyn järjestelmän stabiiliutta. Koska se huomioi erosuureen muutosnopeuden, on sen avulla mahdollista pienentää askelvasteessa esiintyvää ylitystä. Derivaatan laskeminen käytännössä voi kuitenkin olla hankalaa, sillä mittauksissa on usein korkeataajuisia kohinaa, joten vähintäänkin jonkinlaista suodatinta on käytettävä. D-osa on myös herkkä viiveille. (Dorf, Bishop, 2004, s. 391), (Franklin et al., 2006, s. 153-154), (Kuo, 1991, s. 465-466, 471), (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 482-483, 523), (Åström, Hägglund, 1988, s. 7)

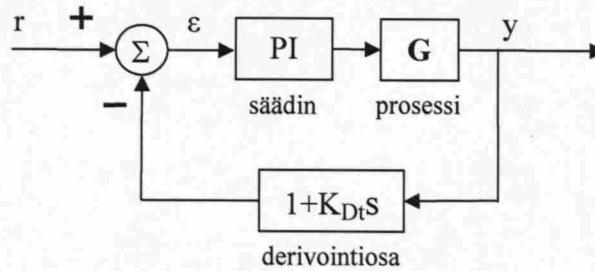
4.2.2 Käytännöllinen PID-säädin

Säätöjärjestelmällä on monia erilaisia vaatimuksia. Sillä tulisi olla hyvä, nopea vaste referenssin muutokseen ja samalla sen pitäisi eliminoida kuormitushäiriöt ja mittauskohina. Monien vaatimusten täyttäminen yhden vapausasteen säätimellä on hankalaa, koska säätimen rakenne vaikuttaa jokaiseen mainittuun tilanteeseen. Asiaa voidaan parantaa ottamalla käyttöön toinen vapausaste. Tämä tapahtuu käsittelemällä asetusarvoa ja mittauksia erillisinä signaaleina pelkän erosuureen sijaan. Vahvistusosassa vain osa referenssistä otetaan huomioon eli

$$u_p(t) = K_p (b \cdot r(t) - y(t)). \quad (47)$$

Uusi P-osa ei eroa oppikirjaversiosta kuormitushäiriöiden eikä mittauskohinan osalta, mutta reagoi pehmeämmin asetusarvon muutokseen, kun valitaan $b < 1$. Tuloksena on pidempi nousuaika ja pienempi ylitys. (Åström, Hägglund, 1988, s. 14-16)

Toinen käytännön muutos liittyy derivointiin. Referenssin askelmainen muutos aiheuttaa sen derivaattaan korkean piikin. Tämä aiheuttaa helposti ongelmia ja on siksi epätoivottu ilmiö. Yleisesti käytettynä ratkaisuna derivointiosa sijoitetaan takaisinkytkentähaaraan (kuva 14), jolloin erosuureen sijasta derivoidaan ainoastaan lähtösuuretta. Tämä on siinäkin mielessä perusteltua, että yleensä referenssi on vakio, jolloin sen derivaatta ei vaikuta ohjaukseen.



Kuva 14: Vaihtoehtoinen derivointi

Suljetun silmukan karakteristinen yhtälö on sama kuin normaalissa tapauksessa, jos valitaan $K_D = K_P K_{Dt}$, mutta perinteisellä PID:llä säädetyllä järjestelmällä on lisäksi kaksi nollaa. (Franklin et al., 2006, s. 155), (Ylén, 2009, luento 10)

Derivaattori voidaan kuitenkin halutessa sijoittaa myös myötähaaraan. Koska ideaalista derivaattoria on mahdotonta toteuttaa käytännössä, se lasketaan usein approksimoiden suodatetulla derivaatalla, jonka toteuttaminen on helpompaa. Suodatettu derivaatta toimii nimensä mukaisesti alipäästösuodattimena, joten se ei ole niin herkkä mittauskohinalle kuin pelkkä derivointi. Samalla saadaan referenssin askelmuutoksilla esiintyvistä äärettömistä ohjaussignaaleista äärellisiä. Yleisin tapa laskea suodatettu derivaatta on

$$K_D s \approx K_D \left(\frac{s}{\tau_d s + 1} \right), \quad (48)$$

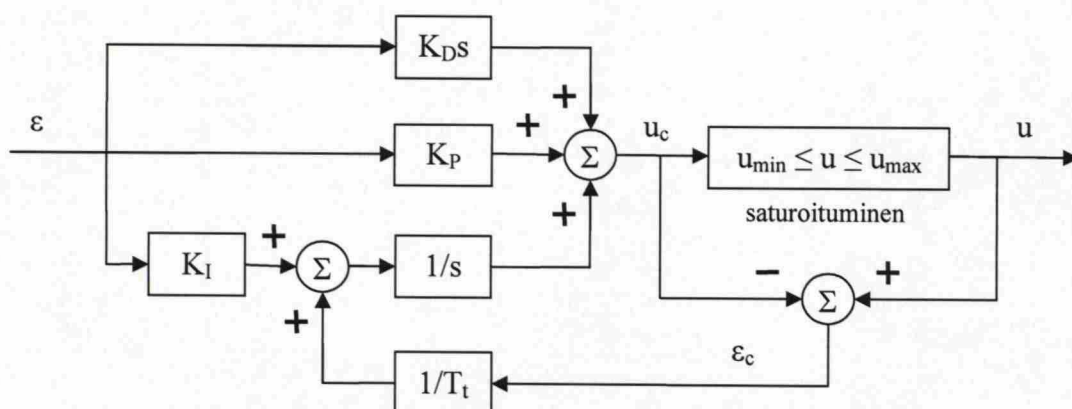
jossa suodatuksen aikavakio τ_d valitaan paljon pienemmäksi kuin prosessin aikavakio. Kun τ_d viritetään oikein, säädetyin järjestelmän vaste on lähes identtinen teoreettisen ja suodatetun derivaatan kesken. Tehdyllä approksimaatiolla ei näin ole suurta eroa ideaaliseen tapaukseen. (Dorf, Bishop, 2004, s. 391), (Ylén, 2009, luento 10)

4.2.3 Ehdollinen integrointi

Toimilaitteen saturoituminen tarkoittaa, ettei toimilaite pysty toteuttamaan pyydettyä ohjausta, koska se on laitteen toiminta-alueen ulkopuolella. Tällainen tilanne syntyy esimerkiksi silloin, kun venttiiliä käsketään avautumaan lisää, vaikka se on jo kokonaan auki. Tällöin toteutunut ohjaus u ja laskettu ohjaus u_c eroavat toisistaan. Koska toteutunut ohjaus on saturoitumisen takia pienempi, kestää erosuureen pieneminen tavallista kauemmin. Saturoitumisen ajan tilanne on verrattavissa avoimeen ohjaukseen,

sillä toteutunut ohjaus pysyy vakiona, vaikka prosessin ulostulo muuttuu. Niin kauan kuin tämä tilanne jatkuu, säätimen integrointiosa jatkaa kasvamistaan. Kun erosuure lopulta saavutetaan, saattaa kertyneen integrointiosan purkautuminen normaalille tasolle kestää hyvin kauan. Seurauksena on selvä ylitys askelvasteessa ja edelleen pitkä asettumisaika. Tätä ilmiötä kutsutaan integroinnin virittäytymiseksi (engl. *integrator windup*).

Virittäytyminen esiintyy yleensä referenssin suurien muutosten, voimakkaiden häiriöiden tai toimilaitteiden vikatilojen yhteydessä. Se voidaan estää keskeyttämällä erosuureen integrointi, kun toimilaite on saturoitunut. Toinen ratkaisu on lisätä integroinnin oheen yksi takaisinkytkentä, joka säättää lasketun ja toteutuneen ohjauksen välisen erosuureen ε_c nollaan (kuva 15). Toisin sanoen se yrittää ajaa integraalin sellaiseen arvoon, että laskettu ohjaus on juuri saturoitumisrajalla. Normaalisissa tilassa uudella takaisinkytkennällä ei ole vaikutusta, sillä ohjausten välinen erosuure on tällöin nolla.



Kuva 15: PID-säädin integroinnin virittäytymisen estävällä takaisinkytkennällä

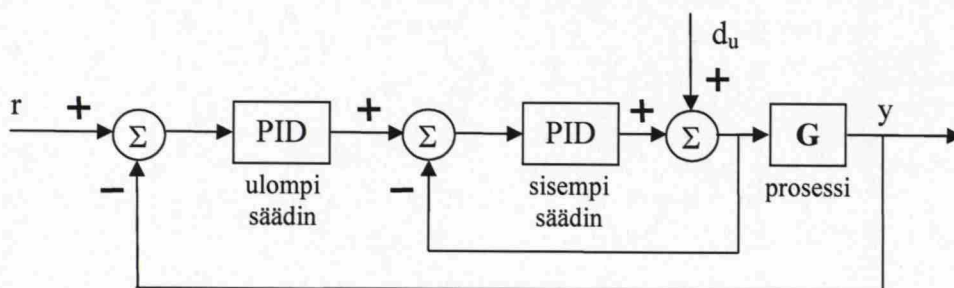
Termi T_t voidaan tulkita aikavakiona, joka määrää, kuinka nopeasti integraali nollautuu. On intuitiivista valita aina hyvin pieni aikavakio, koska tällöin integraali palautuu äkkiä. Kuitenkin systeemeissä, joissa esiintyy derivointia, on varottava käyttämästä liian pientä arvoa, koska derivaatan aiheuttamat signaalihiikit voivat aiheuttaa saturoitumisen, jolloin integraali nollautuu turhaan. (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 585), (Åström, Hägglund, 1988, s. 10-14)

Koska integraalitermi tuo systeemiin hitautta ja värähtelyjä, kannattaa integrointiin tehdä muutoksia muissakin tilanteissa kuin toimilaitteen saturoituessa. Tyypillisesti värähtelevillä systeemeillä integraaliohjausta pienennetään, kun sillä on suuri arvo, erosuure pienenee hyvin nopeasti tai erosuure on lähellä nollaa. Toinen keino on ottaa integrointi käyttöön vain erikoistilanteissa. Esimerkiksi säädin voi toimia muutoin ilman integrointia, mutta vasteen asettua lähelle loppuarvoa otetaan integrointi käyttöön ja viedään lähtösuure näin haluttuun arvoon. (Ylén, 2009, luento 10)

4.2.4 Kaskadisäätö

Kaskadisäätöä voidaan käyttää, kun säätöjärjestelmä koostuu yhdestä ohjauksesta mutta useammasta mittauksesta. Se on erityisen käytännöllinen prosesseissa, joissa ohjauksen ja säädettävän suureen välillä on merkittävää dynamiikkaa, esimerkiksi pitkiä viiveitä tai suuria aikavakioita. Tällöin normaali takaisinkytkentä on turhan hidas. Kaskadisäätöä käyttämällä onkin tarkoitus nopeuttaa hidasta takaisinkytkentää apusuureilla, joissa vaikutukset näkyvät nopeammin. Apusuureiden avulla säätöpiiri voidaan virittää tiukemmaksi ja parantaa merkittävästi säätöä. Kaskadisäädön toimivuus edellyttää, että apusuure pystytään ylipäänsä mittaamaan. Mittaaminen voi kuitenkin olla monimutkaista tai kallista. Kaskadisäätö voi myös lisätä merkittävästi järjestelmän monimutkaisuutta. (Toivonen, Eriksson, 2006), (Åström, Hägglund, 1995, s. 274)

Kaskadisäädön tyypillinen sovellus on kompensoida ohjaukseen vaikuttavat häiriöt. Lähtökohta on kuten normaalissa tapauksessa, eli prosessilla on yksi ulostulo ja sitä säädetään yhdellä ohjauksella. Jos ohjaus kuitenkin altistuu voimakkaille häiriöille, kannattaa siitä tehdä oma takaisinkytkentä kuvan 16 mukaisesti. Kyseessä on siis kaskadisäätö, sillä säätö koostuu kahdesta sarjaan kytketystä PID-säätimestä.



Kuva 16: Kaskadisäätö ohjaushäiriöiden eliminoinemiseksi

Ulompi säädin säätää prosessia kuten ennenkin, mutta sen ohjaus ei mene suoraan prosessiin vaan sisemmän silmukan säätimen asetusarvoksi. Sisempi piiri keskittyy vain pitämään ohjauksen halutussa arvossa. Säädön käytännön toteuttamiseksi on vaadittava, että

1. merkittävät ohjaukseen vaikuttavat häiriöt ovat sisemmän silmukan sisällä, eli toteutunut ohjaus on mitattavissa
2. sisemmän silmukan dynamiikan on oltava huomattavasti ulomman silmukan dynamiikkaa nopeampi, jotta häiriöt ehditään tasata, ennen kuin ne pääsevät vaikuttamaan prosessiin (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 568)

Apusuureena ei välttämättä tarvitse olla toteutunut ohjaus, vaan myös prosessin toista mittausta voidaan hyödyntää. Tyypillinen esimerkki on paikkasäätö, jossa ulommassa silmukassa säädetään paikkaa ja sisemmässä silmukassa nopeutta. Tällaisessa tilanteessa sisemmässä silmukassa käytetään P-säädintä tai korkeintaan PD-säädintä, sillä integraaliosaa vastaa ulomman säätimen vahvistusosa. Samasta yhteydestä johtuen ulommassa silmukassa käytetään harvoin derivointiosaa, koska se vastaa sisemmän

silmukan vahvistusosaa. Apusuureita voi olla muitakin kuin nopeus. Valinnassa on huomioitava, että häiriöt jäävät tiukaksi säädetyn sisemmän silmukan sisään. Sisemmän silmukan pitäisi myös olla vähintään viisi kertaa ulommaista silmukkaa nopeampi. Peräkkäisiä PID-säätimiä voi olla myös useampia kuin kaksi.

Kaskadisäättöpiirin viritys voidaan tehdä samoilla menetelmillä kuin normaalissa säädössä. Näitä vitysmenetelmiä esitellään seuraavassa alaosiossa. Viritys tulee kuitenkin tehdä oikeassa järjestyksessä. Ensin viritetään sisempi silmukka, jonka jälkeen ulompi silmukka viritetään siten, että sisemmän silmukan säätöjärjestelmä on aktiivinen. Kaskadisäädön vityksessä pätee yleisesti, että sisemmän silmukan integrointivakio on suhteessa vahvempi ulkoisempaan silmukkaan, mutta taas ulkoisemman silmukan vahvistus on suurempi suhteessa sisäisempään silmukkaan. (Toivonen, Eriksson, 2006), (Åström, Hägglund, 1995, s. 274-278)

4.2.5 Vitysmenetelmiä

PID-säädin voidaan virittää joko tunnetun mallin perusteella tai empiirisesti käyttäen hyväksi ainoastaan tehtyjä simulointeja tai saatuja mittauksia. Mallipohjaisessa vityksessä tunnetaan prosessin yksinkertainen lineaarinen malli, jonka avulla suljetun piirin navat sijoitetaan haluttuihin kohtiin. Jos mallia ei voida johtaa helposti keskeisten luonnonlakien perusteella, johdettu malli on vahvasti epälineaarinen, prosessissa on monta tuloa ja lähtöä tai prosessi on muutoin hankala, turvaututaan kokeelliseen virittämiseen.

Mallipohjaiseen virittämiseen on käytössä lukuisia eri menetelmiä, kuten suora synteesi, napojenasettelumenetelmät sekä Ziegler-Nichols- ja Cohen-Coon-menetelmät. Suorassa synteessissä säädetyn vasteen halutaan seuraavan ennalta määrättyä rataa, jolloin säädin saadaan ratkaistua. Tuloksena tosin ei välttämättä tule PID-muotoista säädintä. Tällöin saadusta säätimestä voidaan tehdä approksimaatio, joka käy PID-säätimestä. Napojenasettelumenetelmissä päätetään, minkälaista käyttäytymistä vasteelta halutaan ja suljetun systeemin navat sijoitetaan kompleksitasoon sen mukaisesti. Ongelmaksi voi muodostua päätös napojen hyvästä sijainnista. Ziegler-Nichols- ja Cohen-Coon-menetelmät ehdottavat suoraan säätimen vityspanametreja ensimmäisen kertaluvun prosessimallille. Korkeamman kertaluvun prosesseja voidaan usein approksimoida ensimmäisen kertaluvun mallilla. Mainittujen menetelmien lisäksi on olemassa joukko erilaisia taajuustason menetelmiä, joista osa on myös empiirisiä. Ogunnaike ja Ray (1994, s. 526-557) esittelevät niin teoreettisia että kokeellisia menetelmiä tarkemmin.

Empiirisistä menetelmistä tunnetuimpia ovat Zieglerin ja Nicholisin askelvastemenetelmä ja heidän värähtelyrajamenetelmänsä (alaosio 4.2.5.1) sekä kustannuskriteerin numeerinen optimointi (alaosio 4.2.5.2). Näillä menetelmillä PID-säädin saadaan viritettyä, vaikka prosessia ei pystyttäisi esittämään siirtofunktio muodossa. Kokeellisia menetelmiä on olemassa myös taajuustasossa, mutta niitä sivutaan tässä työssä vain Zieglerin ja Nicholisin värähtelyrajamenetelmässä. Tämän perusteena on, että aikatazon menetelmät ovat helpommin ymmärrettäviä ja kuitenkin täysin riittäviä.

4.2.5.1 Zieglerin ja Nicholsin värähtelyrajamenetelmä

Zieglerin ja Nicholsin menetelmissä (askelvaste- ja värähtelyrajamenetelmä) prosessin dynamiikka kuvataan kahdella muuttujalla, jonka jälkeen PID-säätimen viritysparametrit luetaan yksinkertaisista taulukoista. Askelvastemenetelmässä dynamiikka määritetään tekemällä avoimeen prosessiin askelvaste ja piirtämällä tangentti kohtaan, jossa vasteen kulmakerroin on kaikkein suurin. Prosessin parametrit saadaan tangentin ja koordinaattiakselien leikkauskohdista. (Åström, Hägglund, 1988, s. 51-53)

Taajuusanalyysiin perustuvassa värähtelyrajamenetelmässä prosessia kuvataan taajuudella, jolla avoimen piirin dynamiikalla on 180° vaihesiirto sekä vahvistuksella, joka vallitsee kyseisellä taajuudella. Suunnittelu siis perustuu tietämykseen prosessin Nyquistin diagrammista. Pisteestä, jossa Nyquistin diagrammi leikkaa negatiivisen reaaliakselin, saadaan määrättyä kriittinen vahvistus K_u (engl. *ultimate gain*) ja kriittinen jakso T_u (engl. *ultimate period*). Näistä muuttujista saadaan siis arvioitua säätimen parametrit.

Viritysparametrien määrittäminen suoritetaan seuraavasti. Todellista tai simuloitua prosessia säädetään normaalilla takaisinkytkennällä, jossa säätimenä on P-säädin. Säätimen vahvistusta kasvatetaan, kunnes prosessi ajautuu stabiiliusrajalle eli värähtelee harmonisesti. Kriittinen vahvistus K_u on kyseinen P-säätimen vahvistus ja kriittinen jakso T_u luetaan värähtelyn jaksonajasta eli vierekkäisten huippujen ajallisesta erosta. Ziegler ja Nichols ehdottavat taulukon 3 mukaisia nyrkkisääntöjä P-, PI- ja PID-säätimien parametreiksi. Ideana on pienentää säätimien vahvistusta siten, että liikutaan turvallisen matkan päähän stabiiliusrajasta.

Taulukko 3: Suositellut säätimien parametrit
Zieglerin ja Nicholsin värähtelyrajamenetelmän mukaan

säädin/par.	K_c	T_i	T_D	T_p
P	$0,5K_u$	—	—	T_u
PI	$0,4K_u$	$0,8T_u$	—	$1,4T_u$
PID	$0,6K_u$	$0,5T_u$	$0,12T_u$	$0,85T_u$

Parametrit perustuvat vaatimukseen, että viritetty säädin tuottaa vaimenemissuhteen $1/4$, eli toisin sanoen kahden peräkkäisen huipun poikkeamien suhde tasapainotilan arvosta on vähintään 4 . Parametri T_p on estimaatti suljetun silmukan dominoivasta jaksosta. Sen avulla määrätään käytännöllisen PID-säätimen parametri b siten, että asetusarvon ja ohjaussignaalin välisen siirtofunktion nolla

$$s = -\frac{1}{bT_i} \quad (49)$$

on kahdesta kolmeen kertaa suurempi kuin T_p . (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 530-531), (Åström, Hägglund, 1988, s. 54-55, 92)

Säännöt suunniteltiin alun perin antamaan hyvän vasteen kuormitushäiriöille. Tästä syystä käytettäessä normaalia PID-säätimen muotoa parametrit aiheuttavat asetusarvon askelmuutoksilla suuren ylityksen ja hitaan vaimenemisen, koska vahvistus on näihin tilanteisiin liian suuri. Ongelmia voidaan pienentää käyttämällä askeleen sijasta ramppia tai useita pieniä askelia. Ylitykseen on myös helppo vaikuttaa ottamalla vain osa referenssistä huomioon käyttämällä termiä *b*. Ziegler-Nichols-menetelmät perustuvat kuitenkin prosessien hyvin karkeaan kuvaamiseen, joten niihin liittyy aina suurta epävarmuutta. (Åström, Hägglund, 1988, s. 56, 96)

4.2.5.2 *Integroitavien kustannuskriteerien numeerinen optimointi*

Kustannuskriteerejä voidaan pitää säädetyn järjestelmän suorituskyvyn mittana. Yksinkertaistaen voidaan sanoa, että mitä pienempi kustannus on, sitä paremmin toimivampaa säätöä se tarkoittaa. Toisaalta säätöpiiri on mahdollista virittää kriteerin avulla pyrkien saavuttamaan yhä pienempi kustannuksen arvo eli minimoimalla annettu kriteeri. Minimointi tehdään numeerisesti käyttämällä jotakin tarkoitukseen sopivaa tietokoneohjelmistoa, joka vaihtelee säätimen parametrien arvoja, kunnes algoritmin päättöehto täyttyy. Näin mille tahansa prosessimallille on mahdollista määrittää PID-säätimen optimaaliset viritysparametrit valittua matemaattista kriteeriä kohden. Tunnetuin numeerinen minimointialgoritmi lienee Simplex-algoritmi.

Aiemmin optimisäädön yhteydessä esitettiin jo kustannuskriteerin käyttö, jossa kustannus koostui ohjausten ja tilavirheiden painotettujen neliöiden summasta. Yleisimmät kustannuskriteerit integroivat kuitenkin erosuuretta jossakin muodossa. Yleisimmät kriteerit on listattu taulukkoon 4.

Taulukko 4: PID-säätimen kustannuskriteerejä		
	kriteeri	englanninkielinen nimi
IAE	$\int_0^T \varepsilon(t) dt$	Integral of Absolute Error
ISE	$\int_0^T \varepsilon^2(t) dt$	Integral of Squared Error
ITAE	$\int_0^T t \cdot \varepsilon(t) dt$	Integral of Time Absolute Error
ITSE	$\int_0^T t \varepsilon^2(t) dt$	Integral of Time Squared Error

Yksinkertaisimmillaan kustannus muodostetaan integroimalla erosuureen itseisarvoa (IAE) tai vaihtoehtoisesti erosuureen neliötä (ISE), joka rankaisee IAE:tä enemmän suurista virheistä. Loppuaika *T* valitaan siten, että systeemi on ehtinyt saavuttaa uuden tasapainotilan. Edellä mainittuihin kriteereihin voidaan ottaa mukaan myös aika, jolloin saadaan kriteerit ITAE ja ITSE. Ajan lisääminen pienentää alussa syntyvien virheiden suhteellista osuutta kokonaiskustannuksessa ja rankaisee samalla enemmän virheistä lopputilan lähellä. Nyrkkisääntönä voidaan pitää, että ISE ja ITSE tuottavat nopeamman

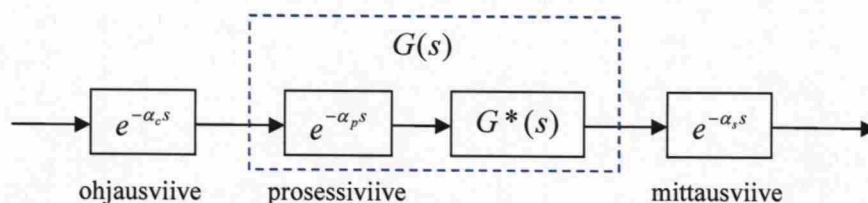
nousuajan mutta suuremman ylityksen kuin IAE tai ITAE. Sama pätee ISE:lle ja IAE:lle verrattuna aikaa integroiviin kriteereihin ITSE ja ITAE. (Dorf, Bishop, 2004, s. 267-269), (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 522-523, 525-526)

4.3 Viiveet säätöpiirissä

Prosessissa ja siihen liitetyissä mittaus- ja ohjausjärjestelmissä voi vaikuttaa yhteensä kolmenlaisia viiveitä: mittaus-, prosessi- ja ohjausviive. Nämä käsitteet määritellään alaosiossa 4.3.1. Alaosiossa 4.3.2 tarkastellaan lyhyesti viiveiden vaikutusta säätöön.

4.3.1 Mittaus-, prosessi- ja ohjausviive

Viivettä kuvataan Laplace-tasossa siirtofunktiolla $e^{-\alpha s}$, jossa α on viiveen pituus. Kaikki kolme viivetyyppiä on piirretty omana lohkonaan kuvaan 17. Mittausviiveen pituus on α_s , prosessiviiveen α_p ja ohjausviiveen α_c . Termillä $G^*(s)$ kuvataan viiveetöntä prosessia eli todellinen prosessi $G(s) = G^*(s)e^{-\alpha_p s}$. (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 254)



Kuva 17: Viiveiden sijainti

Mittausviive käsittää ajan mittaustapahtuman ja tiedon saatavuuden välillä. Sitä aiheuttavat muun muassa tiedonsiirrossa ja datan prosessoinnissa kuluva aika. Analyytisesti on yhdentekevää, johtuuko viive siirtotiestä vai käytetäänkö vanhentuneita mittauksia. Mittausviive on digitaalisissa piireissä tyypillisesti muutamista mikrosekunneista satoihin millisekunteihin. Toisaalta esimerkiksi hitaissa kemianprosesseissa mittauksen analysointi voi kestää tunteja tai päiviäkin.

Prosessiviive on kullekin prosessille ominainen ja se määritetään tarkkailemalla, milloin muuttuneen ohjauksen vaikutus on ensimmäistä kertaa havaittavissa prosessin mittauksessa. Tästä ajasta on luonnollisesti vähennettävä mittausviive. Saatu vaste on täysin sama kuin viiveettömän prosessin, mutta vaste on vain viivästynyt prosessiviiveen, niin sanotun kuolleen ajan, verran. Yleensä mekaaniset prosessit ovat viiveettämiä. Viiveellisiä prosesseja ovat puolestaan esimerkiksi kemianteollisuudessa käytettävät sekoitussäiliöt, joissa yhteen kohtaan lisättävän aineen vaikutus näkyy mittauksessa vasta, kun lisättävä aine on ehtinyt sekoittua muuhun aineeseen ja kulkeutua sen mukana mittauspisteelle. Vaikka prosessiviive on haitallinen, voidaan sitä käyttää myös hyödyksi, sillä korkean kertaluvun prosessia on mahdollista kuvata viiveellisenä alhaisen kertaluvun prosessina, jolloin tarvittavien parametrien määrä on alhaisempi (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 255-256).

Ohjausviiveellä tarkoitetaan aikaa, joka kuluu toimilaitteelle annetun ohjauksen muuttamisesta käytäntöön. Useimmiten itse toimilaitteesta johtuva ohjausviive on pieni, mutta sitä voi aiheuttaa esimerkiksi laskennasta vastaavan tietokoneen ja toimilaitteen välinen tiedonsiirtoviive. Koska ohjausviive on kuvan 17 mukaisesti sarjassa prosessiviiveen kanssa, voidaan ne mallinnuksen kannalta aina yhdistää summaamalla ne yhteen. Ohjaus- ja prosessiviiveen ero tulee esille häiriöiden kautta, sillä häiriöt eivät välttämättä kulje ohjausviiveen kautta, vaan ne vaikuttavat suoraan prosessiin.

4.3.2 Viive säädössä

Viivettä esiintyy usein säätöongelmissa. Kukin eri viivetyypeistä kasvaessaan tarpeeksi suureksi tekee tyydyttävän säätötuloksen saavuttamisesta hankalaa eikä suljetun silmukan suorituskykyä saada yhtä hyväksi kuin viiveettömän. Viiveen läsnäolo myös monimutkaistaa huomattavasti analyttistä tarkastelua. Esimerkiksi normaali tilatakaisinkytkentä $u(t) = Kx(t)$ perustuu viiveettömään systeemiin eikä sitä näin ollen voi soveltaa sellaisenaan, jos systeemissä esiintyy merkittävästi viivettä. Suunnittelussa huomiotta jätetty viive aiheuttaa säätösilmukoihin epästabiiliutta. Viiveetön ensimmäisen kertaluvun prosessi, jota säädetään P-säätimellä, ei voi mennä koskaan epästabiiliksi. Sen sijaan viiveellinen vastaava systeemi alkaa vahvistusta kasvatettaessa värähdellä ja muuttuu lopulta epästabiiliksi. Siksi viiveellisissä säätösilmukoissa joudutaan käyttämään pienempää vahvistusta ja näin vasteesta tulee hitaampi.

Jos viive esiintyy mittauksessa, on selvää, että mittauksesta takaisinkytketty ohjaus perustuu tällöin vanhentuneeseen informaatioon prosessin tilasta. Toisaalta jos viive on ohjauksessa tai itse prosessissa, viivästyy takaisinkytketty ohjaus edelleen. Regulointisäädössä voidaan mittaus-, prosessi- ja ohjausviive yhdistää yhdeksi mittausviiveeksi. Sen sijaan säätörakenteissa, joissa regulointiohjaukseen lisätään myös referenssistä muodostuva ohjaus, muita viiveitä ei voida yhdistää mittausviiveeseen, sillä tällöin mittauksesta riippumaton ohjaus ei viivästyisi yhtään.

Jos viive ei ole merkittävä, helpoin tapa suunnitella säädin on käyttää täysin samoja menetelmiä kuin viiveettömällekin prosessille. Lopuksi säätimen vahvistusta pienennetään. Säädön stabiilius voidaan varmistaa simuloimalla. Mikäli prosessin viive on suuri, joudutaan käyttämään merkittävästi pienempää vahvistusta. Tämä johtaa hyvin hitaaseen vasteen käyttäytymiseen. Tällöin suunnittelussa on kannattavampaa ottaa viive huomioon ja kompensoida se jollain menetelmällä. Tunnetuin jatkuvan ajan menetelmä on Smithin prediktori. Siinä prosessimallin ja mittauksen avulla muodostetaan erosuuretta käyttävälle säätimelle viiveetön vaste. Lopputuloksena on systeemi, jossa on viiveetön takaisinkytkentä ja jossa viive on ikään kuin siirtynyt systeemistä saatavaan mittaukseen. Smithin prediktoriin liittyvä suurin kritiikki kohdistuu prediktorin herkkyyteen mallivirheille. Lisäksi se on suunniteltu vakiona pysyville viiveille. (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 603-607) Smithin prediktorista on olemassa erilaisia parannuksia, joista yhden esittelevät Watanabe ja Ito artikkelissaan (1980). Mainittu lähde myös sisältää hyvän katsauksen muiden tekemiin variaatioihin.

5 Diskreettiaikainen systeemi

Tähän saakka on oletettu, että prosessimittaukset ovat jatkuvia ja että säätäjä tekee jatkuvia muutoksia ohjaussuureeseen. Kun piirissä toimiikin tietokone, mittaukset ja ohjaukset tapahtuvat vain diskreetin välein. Tämä johtaa diskreettiin maailmaan. Taustalla olevat ideat ovat kuitenkin peräisin jatkuvasta maailmasta. Seuraavaksi käydään läpi diskreetin ajan aiheuttamia ilmiöitä (osiot 5.1, 5.2 ja 5.5), diskreetin mallin muodostamista (osio 5.3) ja esitetään diskreetit versiot tilatarkkailijasta (osio 5.4) ja eri säätimistä (osio 5.6).

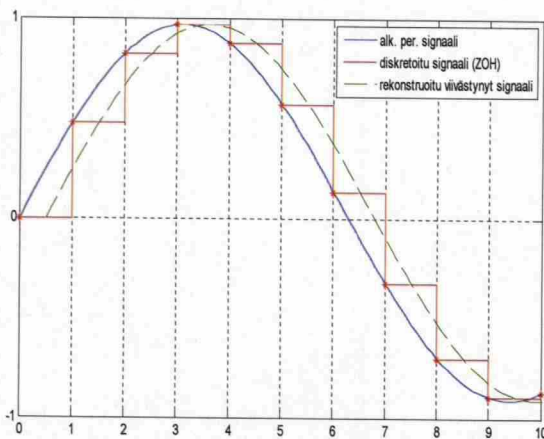
5.1 Diskreetti aika

Vakiona pysyvällä näytteenottotaajuuksella diskretoinnin tuloksena on joukko näytteenottovälin h välein saatuja arvoja mittauksista sekä ohjaussuure, joka koostuu tasavälisistä impulseista ja on nolla kyseisten pisteiden välillä. Yhtymäkohta jatkuvaan aikaan voidaan kirjoittaa

$$t_k = kh, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

jossa siis t_k kuvaa samaa hetkeä sekä jatkuvassa että diskreetissä ajassa. (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 823-825) On sinänsä sama, käytetäänkö diskreetissä ajassa merkintää t vai kh ajan kuvaamiseen. On vain ymmärrettävä, että diskreetissä ajassa t voi saada vain tiettyjä arvoja t_k . Lisäksi on tavanomaista merkitä $h = 1$, jolloin nykyistä hetkeä seuraavaa hetki $kh + h$ voidaan merkitä yksinkertaisemmin $k + 1$.

Koska impulssimaista ohjausta ei luonnollisestikaan haluta toteuttaa käytännössä, käytetään ohjaussuureeseen pitopiiriä. Yleensä käytetään nollannen kertaluvun pitoa (engl. *zero-order hold*, *ZOH*), joka pitää sille annetun arvon seuraavan arvon saapumiseen saakka kuvan 18 mukaisesti.



Kuva 18: Nollannen kertaluvun pitopiiri aiheuttaa keskimäärin viiveen $h/2$

Näin saadaan jatkuva ohjaus, joka sopii paremmin todellisille ohjauslaitteille. Koska pitopiiri pitää arvon vakiona näytteenottovälin ajan, on siitä rekonstruoitu jatkuva signaali viivästynyt alkuperäiseen signaaliin nähden keskimäärin ajan $h/2$ verran. Tämä on otettava huomioon säätösuunnittelussa, etenkin jos näytteenottoväli on pitkä. (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 823-824, 830-832)

5.2 Näytteenotto

Näytteenotolla tarkoitetaan jatkuvan signaalin muuntamista diskreetiksi ottamalla siitä näytteitä jollakin menetelmällä. Näytteenotossa voidaan käyttää joko tasavälistä, ajan funktiona muuttuvaa tai usean taajuuden näytteenottoa. Tasavälisessä näytteenotossa (engl. *periodic sampling*) signaalista otetaan näytteitä vakiona pysyvällä näytteenottotaajuudella. Joissain sovelluksissa voi kuitenkin olla hyödyllistä muuttaa näytteenottotaajuutta signaalien muutosnopeuksien perusteella eli käyttää ajan funktiona muuttuvaa näytteenottoväliä. Tällaisissa sovelluksissa arvot pysyvät yleensä hyvin pitkään vakiona ja muuttuvat sitten nopeasti, jolloin vakiona pysyvä näytteenottotaajuus tulisi asettaa kokonaisuutta ajatellen liian suureksi. Erityisesti MIMO-järjestelmissä voidaan käyttää eri säätösilmukoissa eri näytteenottotaajuuksia. Tällaista näytteenottoa kutsutaan usean taajuuden näytteenotoksi (engl. *multirate sampling*). Tällä saavutetaan teknistä hyötyä, koska järjestelmissä ei suoriteta laskentaa turhan usein. (Härkönen et al., 2006) Jatkossa keskitytään pelkästään tasaväliseen näytteenottoon.

Näytteenottovälin valinnalla on merkittävä rooli diskreeteissä systeemeissä. Yleensä on parempi näytteistää mahdollisimman nopein välein, sillä tällöin näytteistetty signaali muistuttaa mahdollisimman paljon alkuperäistä jatkuvaa signaalia. Liian nopea näytteistys vaatii tietokoneelta kuitenkin enemmän suorituskykyä, lisää kustannuksia ja voi myös aiheuttaa numeerisia ongelmia. Ottamalla puolestaan näytteitä liian harvoin näytteistetty signaali alkaa hukata alkuperäisen signaalin informaatiota ja uhkana on korkeiden taajuuksien laskostuminen matalammille taajuuksille. Myös suljetun silmukan suorituskyky laskee, sillä säätöpiiri toimii avoimen ohjauksen tavoin näytteiden välillä.

Optimaalinen näytteenottovälin pituus sijaitsee näiden kahden ääripään välillä. Nyquistin näytteenottoteoreeman mukaan suurin taajuus, joka näytteistetystä signaalista voidaan rakentaa, on puolet näytteenottotaajuudesta. Toisin sanoen, mikäli näytteiden perusteella halutaan rakentaa alkuperäistä vastaava signaali, on signaalista otettava näytteitä vähintään kaksinkertaisella taajuudella siinä esiintyvään korkeimpaan taajuuteen nähden. Näytteenottoteoreema ei tosin takaa kuin taajuuden kaappaamisen, ja signaalin amplitudi voi jäädä täysin vääräksi ilman korkeampaa näytteenottotaajuutta. Näytteenottovälin valinta onkin hyvin paljon kiinni tarkasteltavasta prosessista. Värähtelevillä systeemeillä näytteenottotaajuus usein sidotaan dominoivan värähtelyn taajuuteen ja värähtelemättömillä systeemeillä nousuaikaan eli dominoivaan aikavakioon (Zenger, 2006, luento 2). Käyttökelpoinen sääntö, jonka on todettu tuottavan hyvän alkuarvauksen näytteenottovälille, on valita

$$h \approx 0,2\tau_{dom},$$

jossa τ_{dom} kuvaa prosessin dominoivaa aikavakiota. (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 826-828) Näytteenottotaajuus suositellaan valitsemaan vähintään 20-kertaiseksi suljetun silmukan taajuuskaistaan nähden, jotta digitaalisen säätimen suorituskky vastaisi jatkuvan säätimen suorituskkyä (Franklin et al., 2006, s. 457).

PID-säätimen näytteenottovälin valinnalle on olemassa suoraan useita muistisääntöjä. Sopivat näytteenottovälit PI- ja PID-säätimille eroavat huomattavasti toisistaan. PI-säätimelle valinta riippuu integrointiajasta T_I siten, että

$$h = 0,1 \dots 0,3 \cdot T_I.$$

Derivoiva PID-säädin sen sijaan vaatii huomattavasti pienemmän näytteenottovälin puhtaaseen PI-säätimeen verrattuna (Zenger, 2006, luento 6). Suositus pohjautuu derivoointiaikaan T_D seuraavasti:

$$h = 0,01 \dots 0,06 \cdot T_D.$$

5.3 Jatkuva-aikaisen tilaesityksen diskretointi

Diskreetti mallipohjainen säätösuunnittelu tarvitsee diskreetin prosessimallin, aivan kuten analoginenkin tarvitsee jatkuvan ajan mallin. Fyysisille prosesseille ei kuitenkaan voida johtaa suoraan diskreettiä mallia, sillä itse prosessi on joka tapauksessa luonteeltaan jatkuva. Diskreettisyys on vain keinotekoinen ilmiö, joka johtuu tietokoneen lisäämisestä. Siksi fyysisille prosesseille voidaan johtaa ainoastaan jatkuvan ajan malli.

Jatkuvan ajan mallille voidaan onneksi muodostaa diskreetti vastine eksaktilla diskretoinnilla. Tämä tapahtuu ratkaisemalla jatkuvan ajan prosessimalli analyttisesti ja olettamalla lisäksi, että tuloihin käytetään nollannen kertaluvun pitoa. Tällöin diskreetiksi vastineeksi saadaan

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k), \end{cases} \quad (50)$$

missä

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi} = e^{\mathbf{A}h} \\ \mathbf{\Gamma} = \int_0^h e^{\mathbf{A}s} d\mathbf{s}\mathbf{B}. \end{cases} \quad (51)$$

Tämä menetelmä toimii hyvin mille tahansa lineaariselle vakiokertoimiselle mallille. On siis huomattava, että äsken muodostettu diskreetti tilaesitys (50) vastaa jatkuvaa tilaesitystä (5), jonka edessä on nollannen kertaluvun pito. (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 835-837, 869-870) Tilaesityksen stabiiliusehto muuttuu jatkuvan ajan esitykseen verrattuna siten, että systeemimatriisin ominaisarvojen tulee olla yksikköympyrän sisäpuolella.

5.4 Diskreetti tilatarkkailija

Tilatarkkailijan periaate ja toteutus esiteltiin aiemmin osiossa 3.4. Diskreetissä ajassa jatkuvan ajan tilatarkkailijalla on kaksi vastinetta (alaosio 5.4.1). Nykyhetkeen perustuva tarkkailija estimoi tilan $\mathbf{x}(k)$ käyttäen hyväkseen mittauksia hetkeen k saakka. Prediktiivinen tarkkailija puolestaan hyödyntää mittauksia ainoastaan hetkeen $k - 1$ saakka. Myös Kalman-suodin poikkeaa jatkuvan ajan tapauksesta (alaosio 5.4.2).

5.4.1 Prediktiivinen ja uusinta mittausta hyödyntävä tilatarkkailija

Prediktiivisen tilatarkkailijan yhtälö on

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1|k) = \Phi(k)\bar{\mathbf{x}}(k|k-1) + \Gamma(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_{ep}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k|k-1)]. \quad (52)$$

(Åström, Wittenmark, 1997, s. 137) Estimointi etenee seuraavasti:

1. näytteenottohetkellä k_n tarkkailija antaa ulos ennalta lasketun estimaatin, joka perustuu edellisen näytteenottohetken k_{n-1} aikaisiin tiloihin, ohjauksiin ja mittauksiin
2. tarkkailijalla on näytteenottovälin h verran aikaa laskea estimaatti hetkelle k_{n+1} , sillä estimaatti perustuu hetken k arvoihin
3. näytteenottohetkellä k_{n+1} tarkkailija antaa ulos kohdassa 2 lasketun estimaatin ja laskee jälleen seuraavan estimaatin valmiiksi ennen seuraavaa näytteenottohetkeä

Koska tilaestimaatti ei pohjaudu kaikista tuoreimpaan mittaukseen, tällaista tarkkailijaa käyttävä tilasäädin $\mathbf{u} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}$ ei ole paras mahdollinen. Tämä näytteenottovälin pituinen viive antaa kuitenkin tietokoneelle aikaa laskea seuraava estimaatti ja on näin ratkaiseva, kun näytteenottoväli on verrattavissa laskenta-aikaan. Toisaalta, kun laskenta-aika on lyhyt näytteenottoväliin nähden, viive koetaan turhana. Tällöin on käytännöllisempää hyödyntää nykyhetkeen perustuvaa mittausta:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}_{ec}(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)], \quad (53)$$

missä

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \Phi(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k) + \Gamma(k)\mathbf{u}(k). \quad (54)$$

Tarkkailijat ovat siis muuten samoja, paitsi jälkimmäisessä hyödynnetään uusinta mittausta. Käytännössä on tietysti mahdotonta saada estimaatin laskentaa valmiiksi samalla hetkellä, kun uusi mittaus saapuu. Tätä ongelmaa voidaan kuitenkin pienentää olennaisesti laskemalla kaikki mittauksesta riippumattomat välitulokset valmiiksi ennen uuden mittauksen saamista. (Franklin et al., 1998, s. 295), (Åström, Wittenmark, 1997, s. 140)

Uusimpaan mittaukseen perustuva estimointi etenee pääpiirteissään seuraavasti:

1. ennen näytteenottohetkeä k_n tarkkailija on laskenut mittauksesta riippumattomat välitulokset valmiiksi (tilat ja ohjaukset tiedetään hetkeltä k_{n-1})
2. näytteenottohetkellä k_n tarkkailija saa uuden mittauksen y_k ja laskee siihen perustuvan estimaatin mahdollisimman nopeasti
3. tarkkailija antaa estimaatin ulos laskenta-ajan viiveellä ja laskee jälleen näytteiden välillä välitulokset valmiiksi seuraavaa estimaattia varten

Tarkkailijoiden vahvistusmatriisien välinen yhteys nähdään helposti yhdistämällä yhtälöt (52) ja (53) uudeksi yhtälöksi

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \Phi(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \Gamma(k)\mathbf{u}(k) + \\ \Phi(k)\mathbf{K}_{e,c}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]. \end{aligned} \quad (55)$$

Vertaamalla yhtälöjä (52) ja (55) saadaan yhteys

$$\mathbf{K}_{e,p}(k) = \Phi(k)\mathbf{K}_{e,c}(k). \quad (56)$$

(Franklin et al., 1998, s. 296)

5.4.2 Diskreetti Kalman-suodin

Soveltamalla Kalman-suodinta diskreettiin tapaukseen optimaalisen vahvistusmatriisin laskemiseksi saadaan nykyhetken mittaukseen perustuvalla tarkkailijalla kaavat

$$\mathbf{K}_{e,c}(k) = \mathbf{P}_e(k|k-1)\mathbf{C}^T(k)[\mathbf{C}(k)\mathbf{P}_e(k|k-1)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}_k(k)]^{-1}, \quad (57)$$

$$\mathbf{P}_e(k|k) = \mathbf{P}_e(k|k-1) - \mathbf{K}_{e,c}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}_e(k|k-1), \quad (58)$$

$$\mathbf{P}_e(k+1|k) = \Phi(k)\mathbf{P}_e(k|k)\Phi^T(k) + \mathbf{Q}_k(k). \quad (59)$$

Prediktiiviselle tilatarkkailijalle optimaalinen vahvistusmatriisi on edelleen (56).

Mikäli matriisit Φ , Γ , Q_k ja R_k ovat vakioarvoisia, Q_k ja R_k ovat positiividefiniitteja, $[\Phi, C]$ on tarkkailtava ja $[\Phi, E]$, jossa E on mikä tahansa matriisi siten, että $EE^T = Q_k$, on stabiiloituva, niin matriisille P_e on olemassa yksikäsitteinen, alkuarvosta $P_{e,0} \geq 0$ riippumaton, äärellinen ja symmetrinen positiivisemidefiniitti raja-arvo

$$P_e = \Phi P_e \Phi^T - \Phi P_e C^T (C P_e C^T + R_k)^{-1} C P_e \Phi^T + Q_k. \quad (60)$$

Lisäksi tilatarkkailija on asympotoottisesti stabiili, ja myös Kalman-suotimen vahvistusmatriisi on aikainvariantti

$$K_{e,c} = P_e C^T (C P_e C^T + R_k)^{-1}. \quad (61)$$

(Anderson, Moore, 1989, s. 201-202), (Glad, Ljung, 2000, s. 137-138), (Åström, Wittenmark, 1997, s. 433)

Tällaisen alioptimaalisen tarkkailijan käyttö on perusteltua, koska vakioarvoisen kovarianssimatriisin toteuttaminen käytännössä on huomattavasti yksinkertaisempaa. Ajan kuluessa optimaalisen ja alioptimaalisen välinen ero häviää, kun matriisi $P(k)$ lähenee vakioarvoaan P ja näin alussa syntynyt virhe menettää merkityksensä. (Anderson, Moore, 1989, s. 202), (Franklin et al., 1998, s. 394)

5.5 Viiveiden käsittely diskreetissä systeemissä

Viiveistä kerrottiin aiemmin osiossa 4.3. Diskreetissä ajassa viiveiden käsittely on helpompaa. Sekä mittaus- että ohjausviive voidaan ottaa huomioon kahdella eri tavalla. Viivästynyt mittaus voidaan joko ottaa tilaesitykseen uutena tilana (alaosio 5.5.1) tai sen sijaan voidaan käyttää tilatarkkailijan antamaa estimaattia tulevasta mittauksesta. Myös viivästynyt ohjaus voidaan lisätä tilaesitykseen uutena tilana (alaosio 5.5.2) tai sitten se yksinkertaisesti syötetään systeemiin ohjausviiveen verran ennen näytteistyshetkeä, jolloin se saavuttaa prosessin ilman viivettä. Tällöin tosin ohjaus on tunnettava etukäteen, mutta kuten seuraavassa tullaan näkemään, tämä on mahdollista tilatarkkailijaa käyttämällä (alaosio 5.5.3). Tilatarkkailijan käyttäminen on suositeltavaa, koska tällöin viiveestä voidaan päästä eroon. Ohjauksen etukäteen syöttäminen, samoin kuin edellä mainitun tapaisen tilatarkkailijan käyttö, edellyttää laitteistolta kykyä toimia muulloinkin kuin näytteenottohetkillä eikä menetelmiä siksi ole kuvattu alan kirjallisuudessa.

5.5.1 Mittausviive

Jollei tilatarkkailijan antamaa estimaattia tulevasta tilasta ole saatavilla, joudutaan turvautumaan viivästyneeseen mittaukseen. Koska mittaus tapahtuu diskreetein välein kh , ei ole merkitystä, onko mittaus viivästynyt esimerkiksi $0,1 \cdot h$ vai $0,9 \cdot h$, sillä viivästynyt mittaus havaitaan kummassakin tapauksessa vasta hetkellä $kh+h$.

Vastaavasti $1,1 \cdot h$ ja $1,9 \cdot h$ viivästyneet mittaukset havaitaan hetkellä $kh+2h$. Tästä syystä mittausviivettä tarkasteltaessa riittää käsitellä ainoastaan näytevälin monikerran verran viivästyneitä mittauksia. Yhden jakson viivästynyt mittaus voidaan kuvata

$$\mathbf{y}_{1d}(kh+h) = \mathbf{y}(kh), \quad (62)$$

missä \mathbf{y}_{1d} on viivästynyt versio mittauksesta \mathbf{y} ja samalla uusi tila lisättäväksi tilaesitysmuotoon. Useamman jakson viivästyminen saadaan esitettyä lisäämällä yhtälöitä ja tiloja samaan tyyliin. Näin esimerkiksi kaksi jaksoa viivästynyt mittaus voidaan esittää

$$\mathbf{y}_{2d}(kh+h) = \mathbf{y}_{1d}(kh), \quad (63)$$

jolloin tilaesitykseksi saadaan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh+h) \\ \mathbf{y}_{1d}(kh+h) \\ \mathbf{y}_{2d}(kh+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh) \\ \mathbf{y}_{1d}(kh) \\ \mathbf{y}_{2d}(kh) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(kh) \quad (64)$$

$$\mathbf{y}_d(kh) = [\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh) \\ \mathbf{y}_{1d}(kh) \\ \mathbf{y}_{2d}(kh) \end{bmatrix},$$

missä \mathbf{y}_d on mittaus \mathbf{y} viivästyneenä kahdella jaksolla. (Franklin et al., 1998, s. 338-339)

5.5.2 Ohjausviive

Ohjausviive (samalla prosessiviive, ks. alaosio 4.3.1) voidaan ottaa huomioon joko syöttämällä ohjaus aiemmin prosessiin (alaosio 5.5.3) tai lisäämällä tilaesitykseen tiloja. Viiveen pituudesta riippuu, kuinka monta lisätilaa tarvitaan. Aina viiveen keston ylittäessä yhden näytteenottovälin h monikerran lisätään yksi uusi tila kutakin viivästynyttä ohjausta kohti. Näin viiveen ollessa $0 < \alpha \leq h$ tarvitaan yksi lisätila, viiveen ollessa $h < \alpha \leq 2h$ tarvitaan kaksi lisätilaa jne. Ohjausviive saa siis juoksevia arvoja toisin kuin mittausviive, sillä ohjausviive tapahtuu systeemissä jatkuvan ajan alueella.

Viiveettömän ohjauksen tapauksessa ohjaus vaihtuu toiseksi aina näytteenottohetkellä, joten kullakin näytteenottovälillä vallitsee vakio-ohjaus. Viiveellisen ohjauksen tapauksessa näytteenottovälillä vaikuttaakin kaksi eri ohjausta: ensin edellisestä hetkestä viivästynyt ohjaus ja sitten nykyiselle hetkelle tarkoitettu myöhässä alkanut ohjaus. Jakamalla nyt väli kahdeksi osa-alueeksi siten, että ohjaus on kummassakin alueessa vakio, saadaan johdettua matriisit

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \int_0^{h-\alpha} e^{As} ds \mathbf{B} \\ \Gamma_d = e^{A(h-\alpha)} \int_0^{\alpha} e^{As} ds \mathbf{B}. \end{cases} \quad (65)$$

Viiveen kestosta riippuu, kuinka uusi tilaesitys muodostetaan. Jos viive on näytteenottoväliä lyhyempi, saadaan yhtälö

$$\mathbf{x}(kh+h) = \Phi \mathbf{x}(kh) + \Gamma_0 \mathbf{u}(kh) + \Gamma_d \mathbf{u}(kh-h). \quad (66)$$

Yhtälö ei ole normaalissa tilaesitysmuodossa, koska yhtälön oikealla puolella ajan hetket eivät ole keskenään samoja. Ratkaisuna on ottaa viivästynyt ohjaus uudeksi tilaksi, jolloin saadaan laajennettu tilaesitys

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh+h) \\ \mathbf{u}(kh) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh) \\ \mathbf{u}(kh-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}(kh). \quad (67)$$

Mikäli viive on näytteenottoväliä pidempi, tulee edellä esitettyä tarkastelua laajentaa. Jaetaan viive α näytteenottovälin monikertaan lh ja ylijäävään osaan α' :

$$\alpha = lh + \alpha', \quad l = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad 0 < \alpha' \leq h.$$

Systeemiä kuvaava yhtälö on tällöin

$$\mathbf{x}(kh+h) = \Phi \mathbf{x}(kh) + \Gamma_0 \mathbf{u}(kh-lh+h) + \Gamma_d \mathbf{u}(kh-lh). \quad (68)$$

Yhtälö saadaan normaaliin tilaesitysmuotoon valitsemalla jälleen viivästyneet ohjaukset uusiksi tiloiksi:

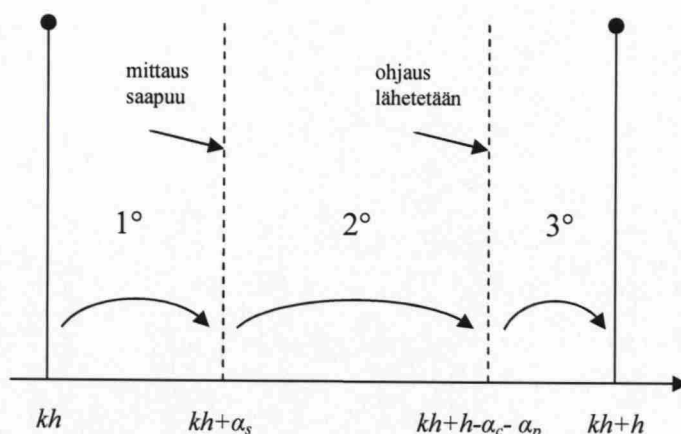
$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh+h) \\ \mathbf{u}(kh-lh+h) \\ \mathbf{u}(kh-lh+2h) \\ \mathbf{u}(kh-lh+3h) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(kh) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_d & \Gamma_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh) \\ \mathbf{u}(kh-lh) \\ \mathbf{u}(kh-lh+h) \\ \mathbf{u}(kh-lh+2h) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(kh-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}(kh). \quad (69)$$

(Franklin et al., 1998, s. 110-114), (Zenger, 2006, luento 2)

5.5.3 Viiveiden eliminointi tilatarkkailijalla

Mittausviiveettömässä systeemissä saadaan mittaus $y(kh)$, joka lähtömatriisin C ollessa identiteettimatriisi on yhtä kuin systeemin tila $x(kh)$. Tästä puolestaan voidaan tehdä normaali tilatakaisinkytkentä $u(kh) = Kx(kh)$. Mikäli kaikkia tiloja ei kuitenkaan voida mitata tai mittauksia halutaan suodattaa, muodostetaan tilalle estimaatti $\hat{x}(kh)$ prediktiivisella tai uusimpaan mittaukseen perustuvalla tilatarkkailijalla. Tilatakaisinkytkentä on tällöin $u(kh) = K\hat{x}(kh)$.

Mikäli mittauksessa on viivettä ja viive on lyhyempi kuin yksi näytteenottoväli, tulee tilatakaisinkytkennäksi ilman tilatarkkailijaa $u(kh) = Kx(kh-h)$, joka puolestaan johtaa huonoon säätöön. Käyttämällä prediktiivista tilatarkkailijaa mittausviiveestä voidaan päästä eroon, koska tällöin viivästyneen mittauksen sijaan voidaan käyttää edellisellä näytteenottohetkellä muodostettua ennustetta. Viiveellisessä tapauksessa ennuste pohjautuu kuitenkin viimeistä edeltävään mittaukseen eikä viimeisimpään kuten kaavassa (52). Tästä ongelmasta päästään eroon käyttämällä laitteistoa, joka mahdollistaa mittauksen rekisteröinnin ja ohjausten lähettämisen näytteenottohetkien välillä. Tällainen tilanne on esitetty kuvassa 19.



Kuva 19: Eri ajanhetket viiveiden eliminoinnissa

Vaiheessa 1° odotetaan viivästynyttä mittausta. Kun mittaus saapuu, on tietokoneella vaiheen 2° verran aikaa laskea valmiiksi seuraavalla näytteenottohetkellä vallitsevan tilan estimaatti ja myös seuraava ohjaus. Yleensä laskenta-aika on lyhyt, jolloin suurin osa vaiheen 2° ajasta kuluu vain seuraavan näytteenottohetken odottamiseen. Koska estimaatti tunnetaan jo ennen seuraavaa näytteenottohetkeä, tunnetaan myös tuleva ohjaus ennakkoon. Näin, mikäli systeemissä on myös ohjaus- tai prosessiviivettä, ohjaus on mahdollista lähettää prosessiin sopivasti aiemmin. Ohjaus kulkee viivettä aiheuttavien systeemin osien läpi vaiheen 3° aikana ja saavuttaa prosessin seuraavalla näytteenottohetkellä viiveettömänä. Kuvailulla menetelmällä on siis mahdollista eliminoida joko yksittäinen viive tai useampi viive yhtäaikaaisesti, kunhan eliminotavien viiveiden summa on näytteenottoväliä lyhyempi.

Uusimpaan mittaukseen perustuva tilatarkkailija ei sovellu hyvin viiveelliseen systeemiin. Ensiksi ohjausta on mahdotonta syöttää etukäteen, koska tässä tarkkailijassa ideana on laskea nykyisen tilan estimaatti jokaisella näytteenottohetkellä. Näin ollen ohjauskin tunnetaan vasta näytteenottohetken jälkeen, joka tekee ennakkoinnista mahdotonta. Toiseksi mittausviiveen tapauksessa estimaatti viivästyy laskenta-ajan lisäksi vähintään mittausviiveen verran. Kuvassa 19 tämä tarkoittaisi sitä, että hetken kh estimaatti saataisiin aikaisintaan vaiheen 1° jälkeen. Jos puolestaan käytetään mittauksen arvoa hetkellä kh , tarkkailija alkaa muistuttaa viiveetöntä prediktivistä tarkkailijaa, paitsi että estimaatti saadaan vasta laskenta-ajan jälkeen, joten tämäkään ei ole järkevää.

5.6 Diskreetit säätimet

Suurin ero perinteisen analogisen säätimen ja nykyaikaisen digitaalisen säätimen välillä on joustavuus. Jatkuva-aikaiset säätimet perustuvat fyysisiin komponentteihin ja ovat näin käytännössä rajoittuneita muutamaa yleisesti tunnettuun muotoon. Tyypillinen esimerkki analogisesta ratkaisusta on PID-säädin. Diskreetit säätimet puolestaan toteutetaan tietokoneilla, joten säädin voi olla lähes mielivaltaisen kompleksinen. Kustannukset eivät kuitenkaan kasva samassa suhteessa monipuolisuuden kanssa. Diskreetillä järjestelmällä saavutetaan myös muita etuja, kuten nopea datankeruu ja suuri tallennustila saadulle datalle.

Diskreetti säädin voidaan toteuttaa kahdella eri tavalla: epäsuorasti ja suorasti. Epäsuorassa lähestymistavassa rakennetaan diskreetti approksimaatio analogiselle säätimelle, joka on suunniteltu jatkuvan ajan tunnetuin menetelmin. Suorassa tavassa puolestaan käytetään täysin diskreettiä esitystä prosessille ja näin säätösuunnittelu johtaa suoraan diskreettiin säätimeen. Tällainen lähestymistapa hyödyntää tietokoneen tuomaa vapautta ja johtaa siksi usein säätimiin, jotka ovat rakenteeltaan hienostuneempia kuin analogiset säätimet.

Epäsuoraa menetelmää voidaan pitää helpompana, koska prosessi on luonteeltaan jatkuva ja suunnittelumenetelmät jatkuvan ajan tapaukselle ovat hyvin tunnettuja. Tuloksena saatu diskreetti säädinapproksimaatio ei kuitenkaan välttämättä ole yhtä hyvä kuin alkuperäinen analoginen säädin. Nämä säätimet myös rajoittuvat samoihin muotoihin, joita jatkuvan ajan säätimissä käytetään.

Suorassa menetelmässä kaikki signaalit ovat diskreettejä ja tuloksena on aito diskreetti säädin. Tällä saavutetaan kaksi merkittävää etua. Ensiksi näytteenoton ja diskretoinnin muodostamat vaikutukset on huomioitu suunnittelussa, jolloin ne eivät näin huononna suorituskkyä. Toiseksi säätimen rakennetta ei rajoiteta, vaan monimutkaisetkin rakenteet ovat mahdollisia. Toisaalta suorassa menetelmässä kadotetaan jatkuvan prosessin luonne. Näin on mahdollista saavuttaa suljettu säätöpiiri, joka kyllä täyttää asetetut tavoitteet tarkasteltavissa näytepisteissä, mutta aiheuttaa todellisuudessa ei-toivottua käyttäytymistä, esimerkiksi voimakasta värähtelyä, näytteiden välillä. (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 821-822, 951, 958)

5.6.1 Diskreetti LQ-säädin

Käsitellään seuraavassa lyhyesti diskreetti LQ-säädin. Optimaalisen säätölain johtaminen etenee hyvin samankaltaisesti verrattuna jatkuvan ajan vastaavaan. Esitetään kuitenkin keskeisimmät tulokset, sillä – vaihtuneen notaation lisäksi – ne sisältävät muutamia eroavaisuuksia.

Olkoon prosessi muotoa

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \Gamma(k)\mathbf{u}(k) \quad (70)$$

ja olkoon kustannuskriteeri regulaattorille

$$V(\mathbf{x}(k_0), \mathbf{u}, k_0) = \sum_{k=k_0+1}^T [\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k-1)\mathbf{R}(k)\mathbf{u}(k-1)], \quad (71)$$

jossa \mathbf{Q} ja \mathbf{R} ovat symmetrisiä positiivisemidefiniitteja matriiseja. Matriisin \mathbf{R} ei siis tarvitse olla positiividefiniitti, toisin kuin jatkuvan ajan tapauksessa, sillä diskreetissä ajassa tiloja ei voida viedä nollaan mielivaltaisen lyhyessä ajassa, vaikka käytettäisiin hyvin suuria ohjauksia. Kustannuskriteerin (71) minimi on

$$V^*(\mathbf{x}(k_0), k_0) = \mathbf{x}^T(k_0)\mathbf{P}(k_0, T)\mathbf{x}(k_0), \quad (72)$$

jossa symmetrinen, positiivisemidefiniitti matriisi \mathbf{P} määritellään

$$\mathbf{P}(k, T) = \mathbf{S}(k) - \mathbf{Q}(k). \quad (73)$$

Matriisi \mathbf{S} puolestaan määritetään rekursiivisesti yhtälöstä

$$\mathbf{S}(k) = \Phi^T(k) \left\{ \mathbf{S}(k+1) - \mathbf{S}(k+1)\Gamma(k) [\Gamma^T(k)\mathbf{S}(k+1)\Gamma(k) + \mathbf{R}(k+1)]^{-1} \Gamma^T(k)\mathbf{S}(k+1) \right\} \Phi(k) + \mathbf{Q}(k), \quad \mathbf{S}(T) = \mathbf{Q}(T). \quad (74)$$

(Anderson, Moore, 1989, s. 28-31) Optimaalinen regulointiohjaus on

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(k) &= -[\Gamma^T(k)\mathbf{S}(k+1)\Gamma(k) + \mathbf{R}(k+1)]^{-1} \Gamma^T(k)\mathbf{S}(k+1)\Phi(k)\mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (75)$$

Pitämällä matriiseja Φ , Γ , \mathbf{Q} ja \mathbf{R} vakiomatriiseina ja systeemiä $[\Phi, \Gamma]$ stabiloituvana voidaan yhtälöistä (74) ja (75) pudottaa eri ajanhetket pois, sillä tällöin myös matriisit \mathbf{P} , \mathbf{S} ja \mathbf{K} ovat vakioita. Edelleen systeemin $[\Phi, \mathbf{E}]$ havaittavuus, jossa \mathbf{E} on mikä tahansa matriisi siten, että $\mathbf{E}\mathbf{E}^T = \mathbf{Q}$, takaa suljetun järjestelmän asympotoottisen stabiiliuden. (Anderson, Moore, 1989, s. 53-54)

Diskreetille servotehtävälle kustannuskriteeri saadaan yhtälöstä (71) korvaamalla tila $\mathbf{x}(k)$ erosuurella $\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_r(k)$ ja vaatimalla, että matriisi \mathbf{R} on positiividefiniitti. Matriisit \mathbf{P} , \mathbf{S} ja \mathbf{K} lasketaan kuten regulointitapauksessa. Optimaalinen servo-ohjaus on

$$\mathbf{u}^*(k) = -[\Gamma^T(k)\mathbf{S}(k+1)\Gamma(k) + \mathbf{R}(k+1)]^{-1}\Gamma^T(k)[\mathbf{S}(k+1)\Phi(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}(k+1)], \quad (76)$$

jossa

$$\mathbf{b}(k) = [\Phi^T(k) + \mathbf{K}(k)\Gamma^T(k)]\mathbf{b}(k+1) - \mathbf{Q}(k)\mathbf{x}_r(k), \quad \mathbf{b}(T) = 0. \quad (77)$$

(Anderson, Moore, 1989, s. 81) Edelleen aikainvariantissa tapauksessa saadaan

$$\mathbf{b} = (\Phi^T + \mathbf{K}\Gamma^T - \mathbf{I})^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{x}_r. \quad (78)$$

Koska säädin ei poista pysyvää poikkeamaa, esitetään vielä integraalin lisääminen diskreetissä tapauksessa. Kaavaa (41) soveltamalla saadaan

$$\mathbf{x}_I(kh+h) = \mathbf{x}_I(kh) + h \cdot (\mathbf{r}(kh) - \mathbf{C}\mathbf{x}(kh)), \quad (79)$$

jolloin laajennettu tilaesitys on

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh+h) \\ \mathbf{x}_I(kh+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ -h \cdot \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh) \\ \mathbf{x}_I(kh) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(kh) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ h \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r}(kh) \\ \mathbf{y}(kh) = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh) \\ \mathbf{x}_I(kh) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (80)$$

(Franklin et al., 1998, s. 324), (The Mathworks, 2009, lqi)

5.6.2 Diskreetti PID-säädin

Diskreetti PID-säädin on helpoin ja yleisin diskreetti säädin. Se juontaa juurensa analogisen PID-säätimen approksimoinnista, joten kyseessä on epäsuora tapa säätimen suunnitteluun. Jotta analoginen PID-säädin voitaisiin toteuttaa tietokoneessa, on eri termeihin kiinnitettävä hieman huomiota. Selvästi P-osa voidaan toteuttaa sellaisenaan, sillä kyse on vain erosuureen kertomisesta vahvistuksella. Sen sijaan säätölaissa esiintyvät integraali- ja derivointiosa on välttämätöntä approksimoida jotenkin. Integraaliosaa approksimoidaan yleensä taaksepäin laskettavaa suorakaidesääntöä käyttäen yhtälöllä

$$\int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \approx h \cdot \sum_{i=1}^k \varepsilon(h \cdot i), \quad (81)$$

jonka diskreetille osalle on puolestaan helppo muodostaa ohjelmoinnissa käytännöllinen laskukaava

$$u_I(kh) = u_I(kh - h) + h \cdot K_I \varepsilon(kh). \quad (82)$$

Integraalia voidaan approksimoida myös käyttämällä eteenpäin laskettavaa suorakaidesääntöä

$$\int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \approx h \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon(h \cdot i), \quad (83)$$

jonka rekursiivinen muoto on

$$u_I(kh) = u_I(kh - h) + h \cdot K_I \varepsilon(kh - h). \quad (84)$$

Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää myös eteenpäin ja taaksepäin laskettavien sääntöjen keskiarvoa eli puolisuunnikkasääntöä

$$u_I(kh) = u_I(kh - h) + \frac{h}{2} \cdot K_I (\varepsilon(kh) + \varepsilon(kh - h)), \quad (85)$$

josta käytetään nimitystä Tustinin approksimaatio (Franklin et al., 2006, s. 159).

Derivaattaa voidaan approksimoida ainoastaan taaksepäin derivoinnilla, koska eteenpäin derivointi vaatisi tulevan erosuureen arvon tuntemista. Derivaatan approksimaatio on siis

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \approx \frac{\varepsilon(kh) - \varepsilon(kh - h)}{h}. \quad (86)$$

Liittämällä taaksepäin integraalin ja derivaatan vastineet PID-säätimen kaavaan, saadaan taaksepäin integroimalla ja derivoimalla ohjaus

$$u(kh) = K_P \varepsilon(kh) + h \cdot K_I \sum_{i=1}^k \varepsilon(h \cdot i) + K_D \frac{\varepsilon(kh) - \varepsilon(kh - h)}{h}. \quad (87)$$

Tällaista muotoa kutsutaan säätimen asento- eli absoluuttimuodoksi (engl. *position form*, *absolute form*), koska sen avulla lasketaan säätimen antaman ohjaussignaalin absoluuttinen arvo. Differenssiyhtälöstä (87) havaitaan, että uuden ohjaussuuren arvon laskemiseksi tulee integrointitermistä johtuvaa summaa päivittää, mikä ei ole laskennallisesti tehokasta. Siksi käytännön sovelluksissa käytetään usein nopeus- eli inkrementaalista muotoa (engl. *velocity form*, *incremental form*), jonka avulla ohjaussignaalin muutos voidaan laskea edellisistä näytteenottohetkistä. Esimerkiksi takaisinpäin integroivan säätimen nopeusmuoto on

$$\Delta u(kh) = \left(K_p + h \cdot K_I + \frac{K_D}{h} \right) \varepsilon(kh) - \left(K_p + \frac{2K_D}{h} \right) \varepsilon(kh-h) + \frac{K_D}{h} \varepsilon(kh-2h). \quad (88)$$

On huomattava, että edellä esitetyt PID-algoritmit (87) ja (88) eivät siis ole ainoita oikeita kaavoja, sillä ne riippuvat käytetyistä approksimointimenetelmistä.

Käytännöllisessä PID-säätimessä P-osaan otetaan huomioon vain osa referenssistä ja lisäksi käytetään suodatettua derivaattaa. Tällöin taaksepäin integroiva säädin on

$$u(kh) = u_p(kh) + u_I(kh) + u_D(kh), \quad (89)$$

missä

$$\begin{aligned} u_p(kh) &= K_p(b \cdot r(kh) - y(kh)), \\ u_I(kh) &= u_I(kh-h) + h \cdot K_I \varepsilon(kh), \\ u_D(kh) &= \frac{K_D \tau_d}{K_D \tau_d + h \cdot K_p} u_D(kh-h) - \frac{K_p K_D}{K_D \tau_d + h \cdot K_p} (y(kh) - y(kh-h)). \end{aligned} \quad (90)$$

(Ogunnaike, Ray, 1994, s. 960-963), (Åström, Hägglund, 1988, s. 20-21, 23), (Zenger, 2006, luento 6) Integroinnin virittäytyminen estetään samalla menetelmällä kuin jatkuva-aikaisessa PID-säätimessä, jolloin integrointiosaksi saadaan

$$u_I(kh) = u_I(kh-h) + h \cdot K_I \varepsilon(kh) + \frac{h}{T_I} (u(kh-h) - u_c(kh-h)), \quad (91)$$

missä T_I on integraalin nollautumisnopeuden määräävä aikavakio ja u_c on saturoitumaton ohjaus.

Lopuksi on vielä syytä kommentoida digitaalisen säätimen virittämistä. Koska lyhyttä näytteenottoväliä käyttävä säädin käyttäytyy vastaavan analogisen säätimen tavoin, voidaan tällaisissa tapauksissa diskreetti säädin virittää analogisen säätimen keinoin. Jos näyteväli on kuitenkin pitkä, täytyy nollannen kertaluvun pitopiirin aiheuttama keskimääräinen viive $h/2$ ottaa huomioon lisäämällä se analogisen säätimen suunnitteluun. Tällä taataan, ettei diskretoitu ja digitaalisesti toteutettu säädin aiheuta yllättävää epästabiiliutta. (Ogunnaike, Ray, 1994, s. 964), (Zenger, 2006, luento 6)

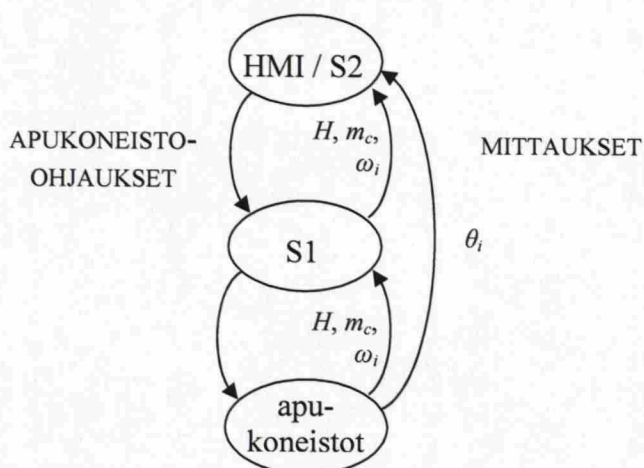
6 Konttinosturijärjestelmän kuvaus ja dynaamisen mallin muodostaminen

Tässä luvussa tutustutaan konttinosturin nykyiseen mittaus- ja ohjausjärjestelmään (osio 6.1) sekä esitetään matemaattinen malli, jolla kuvataan apukoneistojen ja kuormauselimen välistä dynaamista riippuvuutta (osiot 6.2 ja 6.3).

6.1 Järjestelmän kuvaus

Apukoneistojärjestelmän fyysinen rakenne kuvailtiin yleisellä tasolla jo alaosiossa 2.2.2, mutta sen yhteyttä mittaus- ja säätöjärjestelmiin ei olla käsitelty. Kuormauselimen paikkaan vaikutetaan apukoneistojen moottoreilla, joille kunkin moottorin taajuusmuuttaja välittää saamansa momenttiohjeen jännitteen ja taajuuden muodossa. Taajuusmuuttajat saavat oman ohjeensa nosturin toimintoja ohjaavalta järjestelmältä S1. Kuten kuvassa 20 on esitetty, S1 lukee apukoneistojen taajuusmuuttajilta moottorien kulmanopeudet ω_i , jotka on puolestaan laskettu moottoreiden pulssianturien antamien tietojen perusteella. Lisäksi S1 saa tiedon taakan massasta m_c ja nostoköysien pituuksista H .

S1-järjestelmää ylemmällä tasolla toimii operaattori (HMI), jonka tehtäviä on mahdollista siirtää tietojärjestelmän S2 suoritettavaksi. Kaikki HMI:n ja S2:n antamat komennot menevät nosturille S1:n kautta. Tieto kuormauselimen ja tartuttavan kontin tai maassa olevan maalikohteen paikasta välittyy HMI:lle operaattorin näköhavainnon tai etäohjauksen tapauksessa vaunuun sijoitetun kameran kautta. S2 saa mainitut mittaukset θ_i siihen kytketyiltä kameroilta, laser-, infrapuna- tai ultraääniantureilta, jotka voivat sijaita vaunussa tai kuormauselimestä. S1 ja S2 kommunikoivat keskenään tietyin välein. Tästä johtuen S2:ssa toteutettu paikkasäädin suunnitellaan toimimaan kyseisellä näytteenottovälillä.



Kuva 20: Mittausten ja ohjausten kulku järjestelmässä

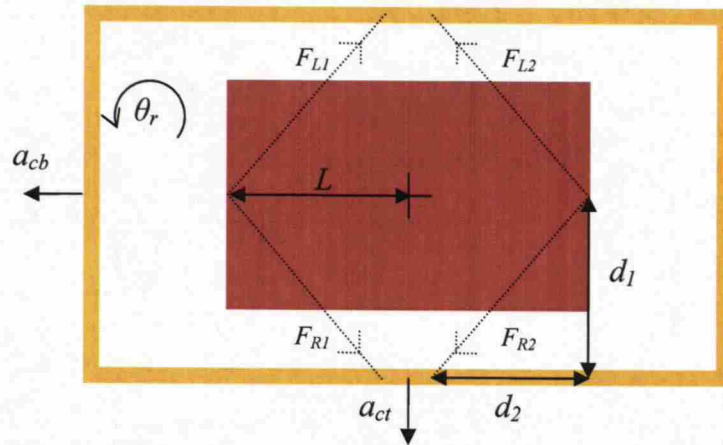
6.2 Differentiaaliyhtälöiden johtaminen ja mallin simulointi

Esitetään apukoneistojen ja kuormauselimen välillä vaikuttavat differentiaaliyhtälöt, jotka Salomäki (2008) on johtanut. Otetaan tätä varten taulukon 5 mukaiset merkinnät käyttöön.

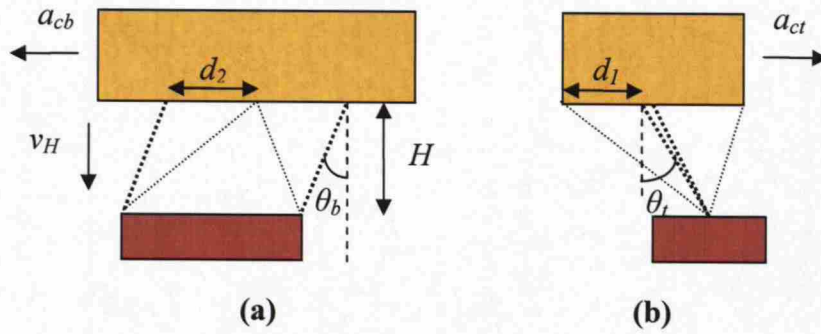
Taulukko 5: Käytetyt merkinnät

symboli	merkitys	yksikkö
A_r	köyden poikkileikkauksen pinta-ala	m^2
E	köyden eli teräksen kimmokerroin	N / m^2
$F_{L1}, F_{L2}, F_{R1}, F_{R2}$	apukoneistojen köysien köysivoimat	N
H	nostoetäisyys (nostoköyden telalta kuormauselimeen)	m
J	taakan puolelle redusoitu moottorin hitausmomentti	$kg \cdot m^2$
J_c	taakan hitausmomentti	$kg \cdot m^2$
J_m	apukoneiston moottorin hitausmomentti	$kg \cdot m^2$
L	etäisyys kuormauselimen keskeltä kiinnityskohtaan	m
M	taakan massa (kuormauselin + kontti)	kg
N	apukoneiston moottorin välityssuhde	$-$
$T_{L1}, T_{L2}, T_{R1}, T_{R2}$	apukoneistojen moottorien momentit	Nm
Z	apumuuttuja	$1 / m$
a_{cb}, a_{ct}	pukin ja vaunun kiihtyvyys	m / s^2
d_1, d_2	etäisyydet vaunun köysirummulta kuormauselimen kiinnityskohtaan (kuva 21)	m
g	putoamiskiihtyvyys	m / s^2
k	köyden jousivakio	N / m
r	apukoneiston köysirummun säde	m
v_H	taakan nostonopeus	m / s
$\omega_t, \omega_b, \omega_r$	heilahduskulmanopeudet (vaunun ja pukin suunnassa sekä rotaatio)	rad / s
$\omega_{L1}, \omega_{L2}, \omega_{R1}, \omega_{R2}$	apukoneistojen moottorien kulmanopeudet	rad / s
$\theta_t, \theta_b, \theta_r$	heilahduskulmat (vaunun ja pukin suunnassa sekä rotaatio)	rad

Kuormauselimen ripustuksen geometria on esitetty kuvissa 21 ja 22.



Kuva 21: Vaunun (keltainen) ja kuormauselimen (punainen) välinen geometria



Kuva 22: Heilahduskulmat nosturin (a) ja vaunun (b) suunnassa

Ottamalla käyttöön apumuuttuja

$$Z = 1/\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + H^2}$$

voidaan taakan kulmakiihtyvyydelle vaunun ja pukin liikesuunnissa sekä rotaatiossa kirjoittaa

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_l &= \frac{-g}{H} \sin \theta_l + \frac{Zd_1}{HM} (-F_{L1} + F_{R1} - F_{L2} + F_{R2}) - \frac{1}{H} a_{ct}, \\ \dot{\omega}_b &= \frac{-g}{H} \sin \theta_b + \frac{Zd_2}{HM} (-F_{L1} - F_{R1} + F_{L2} + F_{R2}) - \frac{1}{H} a_{cb}, \\ \dot{\omega}_r &= \frac{LZ}{J_c} (d_1 \cos \theta_r + d_2 \sin \theta_r) (F_{R1} + F_{L2}) + \\ &\quad \frac{LZ}{J_c} (-d_1 \cos \theta_r + d_2 \sin \theta_r) (F_{L1} + F_{R2}) - \frac{L^2 Mg}{HJ_c} \theta_r.\end{aligned}\tag{92}$$

Kullekin apukoneiston moottorin kulmakiihtyvyydelle pätee

$$\dot{\omega}_{i=L1,L2,R1,R2} = \frac{N}{J} (NT_i - rF_i), \quad (93)$$

jossa $J = N^2 J_M$. On kannattavampaa tarkastella moottorien kulmanopeuksia köysipyörien kulmanopeuksien sijaan, koska mittauksia saadaan suoraan moottoreilta. Lepotilassa siis moottorin momentin ja köysivoiman välillä on yhteys

$$NT_{i=L1,L2,R1,R2} = rF_i. \quad (94)$$

Köydet mallinnetaan siten, että ne noudattavat perinteistä jousiyhtälöä. Köysivoima muuttuu, kun taakan korkeutta muutetaan, apukoneiston moottori pyörii tai kun taakka heiluu. Köysivoiman F_{L1} muutokselle pätee siten

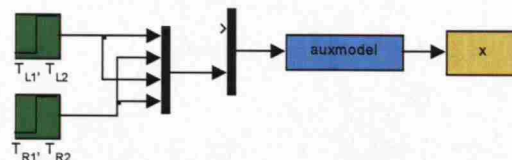
$$\dot{F}_{L1} = k \left(-v_H + \frac{r}{N} \omega_{L1} + \frac{(L\theta_r + H\theta_t + d_1)(L\omega_r + v_H\theta_t + H\omega_t) + (H\theta_b + d_2)(v_H\theta_b + H\omega_b) + Hv_H}{\sqrt{(L\theta_r + H\theta_t + d_1)^2 + (H\theta_b + d_2)^2 + H^2}} \right), \quad (95)$$

jossa k on taakan etäisyydestä riippuva jousivakio

$$k = \frac{E \cdot A_r}{H + \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + H^2}}. \quad (96)$$

Köysivoimille F_{R1} , F_{L2} ja F_{R2} saadaan vastaavat yhtälöt vaihtamalla kulmanopeuden indeksi oikeaksi ja tekemällä lisäksi seuraavat merkinvaihdot. Köysivoimalle F_{R1} etäisyys d_1 on erimerkkinen. Köysivoimalle F_{L2} tulee vaihtaa etäisyyksien d_2 ja L etumerkit. Köysivoimalle F_{R2} tulee vaihtaa muuttujien d_1 , d_2 ja L etumerkit.

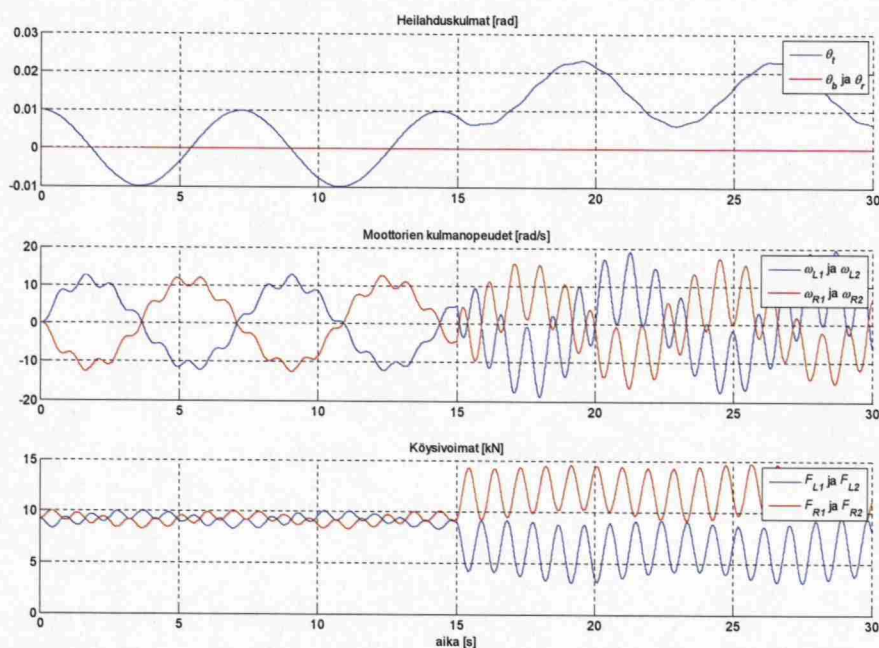
Tarkastellaan vielä äsken esitettyjen yhtälöiden toimivuutta. Työkaluna käytetään laskentaohjelmistoa MATLAB ja sen yhteyteen rakennettua Simulink-ohjelmaa, jolla dynaamisten järjestelmien simulointi on helppoa. Simulointia varten tehdään kuvan 23 mukainen Simulink-malli. Sininen lohko sisältää kaikki edellä esitetyt yhtälöt. Taakan paikkaan voidaan vaikuttaa nostonopeudella, vaunun ja pukin kiihtyvyyksillä (multiplekserin yhdistämätön sisäänvalo) sekä apukoneistojen moottorien momenteilla (vihreät lohkot). Mallista saadaan nostoetäisyys, vaunun ja pukin nopeudet, taakan heilahduskulmat ja niiden nopeudet, moottorien kulmanopeudet sekä köysivoimat.



Kuva 23: Koko apukoneistojärjestelmän malli on toteutettu yhteen Simulink-lohkoon

Nostoetäisyys H voi vaihdella tyypillisellä nosturilla 3 metristä 21 metriin. Kokonaistaakka M koostuu kuormauselimen vakiomassasta ja mahdollisen kontin massasta m_c . Kontin massa on vähintään 2 000 kg (20-jalkainen tyhjä kontti) ja korkeintaan 30 500 kg (suurin sallittu kontin massa).

Valitaan nostoetäisyydeksi $H = 10$ m ja kontin massaksi $m_c = 5\,000$ kg, joka vastaa karkeasti tyhjän 40-jalkaisen kontin massaa. Asetetaan alkutilaksi $\theta_i = 0,01$ rad, joka kyseisellä nostoetäisyydellä vastaa 10 senttimetrin siirtymää. Muut heilahduskulmat, samoin kuin kaikki kulmanopeudet, ovat alkutilassa nolliä. Apuköysissä halutaan pitää tietty massasta riippuva peruskireys, joka saadaan muunnettua momentiksi kaavalla (94). Pidetään tämä momenttitaso samana simuloinnin ensimmäiset 15 sekuntia, jonka jälkeen momenttia kasvatetaan hieman moottoreissa $R1$ ja $R2$ ja vähennetään saman verran moottoreissa $L1$ ja $L2$. Tuloksena saadaan kuvassa 24 esitetyt käyttäytymiset.



Kuva 24: Heilahduskulmien, moottorien nopeuksien ja köysivoimien käyttäytyminen avoimella ohjauksella

Kuvasta nähdään, että taakka värähtelee vaunun liikkeen suunnassa harmonisesti aluksi keskipisteen ja momenttien muutoksen jälkeen kulman 0,015 rad ympärillä. Muun suuntaiset heilahtelut pysyvät odotetusti poissa. Mallissa ei ole otettu huomioon heilahteluun kohdistuvia vaimentavia voimia, joten simuloinnin mukaan taakka jatkaa tasaista heilahteluaan ikuisesti ilman sopivia ohjauksia. Tehty yksinkertaistus ei ole merkittävä, sillä taakan heilahtelun vaimeneminen on todellisuudessa hyvin hidasta. Apukoneistojen moottorien kulmanopeuksissa on nähtävissä taakan heilahtelusta johtuvan matalataajuisten värähtelyjen lisäksi korkeataajuisia värähtelyä, joka johtuu jousina mallinnetuista köysistä. Matalat ja korkeat taajuudet esiintyvät vastaavasti myös köysivoimissa.

6.3 Tilaesityksen muodostaminen

Edellisessä osiossa esitetyt differentiaaliyhtälöt muodostavat apukoneistojärjestelmän dynaamisen mallin. Yhtälöt voidaan kerätä yhteen, jolloin niistä muodostuu epälineaarinen tilaesitys. Tällainen esitys on muodostettu alaosiossa 6.1. Jotta tilaesitystä voitaisiin käyttää LQ-säätimen suunnitteluun, on esityksen oltava lineaarinen. Linearisointi tehdään alaosiossa 6.2. Lopuksi alaosiossa 6.3 tutkitaan, kuinka hyvin lineaarinen tilaesitys vastaa alkuperäistä epälineaarista esitystä.

6.3.1 Yleinen tilaesitys

Edellisessä osiossa esitetyistä differentiaaliyhtälöistä saadaan helposti muodostettua yleinen, epälineaarinen tilaesitys valitsemalla tilavektoriksi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_b \\ \theta_r \\ \omega_t \\ \omega_b \\ \omega_r \\ \omega_{L1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \omega_{R1} \\ \omega_{L2} \\ \omega_{R2} \\ F_{L1} \\ F_{R1} \\ F_{L2} \\ F_{R2} \end{bmatrix}$$

sekä käsittelemällä tulosuureita käytettävänä ohjauksina \mathbf{u} ja tunnettuina häiriöinä \mathbf{d}_m

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{L1} \\ T_{R1} \\ T_{L2} \\ T_{R2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_m = \begin{bmatrix} d_{m1} \\ d_{m2} \\ d_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_H \\ a_{ct} \\ a_{cb} \end{bmatrix}.$$

Myös nostoetäisyyttä voitaisiin pitää yhtenä tilana. Seuraavassa alaosiossa kuitenkin näytetään, ettei tämän tilan valitseminen ole hyödyllistä. Näillä valinnoilla tilaesitykseksi kullakin nostoetäisyydellä H ja massalla M tulee

$$\dot{x}_1 = x_4$$

$$\dot{x}_2 = x_5$$

$$\dot{x}_3 = x_6$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-g}{H} \sin x_1 + \frac{Zd_1}{HM} (-x_{11} + x_{12} - x_{13} + x_{14}) - \frac{1}{H} d_{m2}$$

$$\dot{x}_5 = \frac{-g}{H} \sin x_2 + \frac{Zd_2}{HM} (-x_{11} - x_{12} + x_{13} + x_{14}) - \frac{1}{H} d_{m3}$$

$$\dot{x}_6 = \frac{LZ}{J_c} (d_1 \cos x_3 + d_2 \sin x_3)(x_{12} + x_{13}) + \frac{LZ}{J_c} (-d_1 \cos x_3 + d_2 \sin x_3)(x_{11} + x_{14}) - \frac{L^2 Mg}{HJ_c} x_3$$

$$\dot{x}_7 = \frac{N}{J} (Nu_1 - rx_{11})$$

$$\dot{x}_8 = \frac{N}{J} (Nu_2 - rx_{12})$$

$$\dot{x}_9 = \frac{N}{J} (Nu_3 - rx_{13})$$

$$\dot{x}_{10} = \frac{N}{J} (Nu_4 - rx_{14})$$

$$\dot{x}_{11} = k \left(-d_{m1} + \frac{r}{N} x_7 + \frac{(Lx_3 + Hx_1 + d_1)(Lx_6 + x_1 d_{m1} + Hx_4) + (Hx_2 + d_2)(x_2 d_{m1} + Hx_5) + Hd_{m1}}{\sqrt{(Lx_3 + Hx_1 + d_1)^2 + (Hx_2 + d_2)^2 + H^2}} \right)$$

$$\dot{x}_{12} = k \left(-d_{m1} + \frac{r}{N} x_8 + \frac{(Lx_3 + Hx_1 - d_1)(Lx_6 + x_1 d_{m1} + Hx_4) + (Hx_2 + d_2)(x_2 d_{m1} + Hx_5) + Hd_{m1}}{\sqrt{(Lx_3 + Hx_1 - d_1)^2 + (Hx_2 + d_2)^2 + H^2}} \right)$$

$$\dot{x}_{13} = k \left(-d_{m1} + \frac{r}{N} x_9 + \frac{(-Lx_3 + Hx_1 + d_1)(-Lx_6 + x_1 d_{m1} + Hx_4) + (Hx_2 - d_2)(x_2 d_{m1} + Hx_5) + Hd_{m1}}{\sqrt{(-Lx_3 + Hx_1 + d_1)^2 + (Hx_2 - d_2)^2 + H^2}} \right)$$

$$\dot{x}_{14} = k \left(-d_{m1} + \frac{r}{N} x_{10} + \frac{(-Lx_3 + Hx_1 - d_1)(-Lx_6 + x_1 d_{m1} + Hx_4) + (Hx_2 - d_2)(x_2 d_{m1} + Hx_5) + Hd_{m1}}{\sqrt{(-Lx_3 + Hx_1 - d_1)^2 + (Hx_2 - d_2)^2 + H^2}} \right).$$

6.3.2 Tilaesityksen linearisointi

Linearisoidaan edellisessä alaosiassa esitetty tilaesitys. Linearisoinnissa tarvittavat Jacobin matriisit \mathbf{J}_{fx} , \mathbf{J}_{fu} ja \mathbf{J}_{fdm} on esitetty liitteessä B. Etenkin matriisi \mathbf{J}_{fx} on valitettavan monimutkainen. Tilanne kuitenkin yksinkertaistuu huomattavasti ottamalla huomioon, että ainut luonnollinen tasapainotila on tila, jossa tilat $x_1 \dots x_{10}$ ovat nollia, köysivoimat $x_{11} \dots x_{14}$ ovat keskenään yhtä suuria ja jossa myös vaunun kiihtyvyys, pukin kiihtyvyys ja taakan nostonopeus ovat nollia. Sijoittamalla tämä tasapainotila derivoituihin matriiseihin ja merkitsemällä muiden termien (H , M) linearisointipistettä alaindeksillä s saadaan jatkuvaksi lineaariseksi tilaesitykseksi

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(H_s, M_s)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_{dm}(H_s)\mathbf{d}_m(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_{dm}\mathbf{d}_m(t), \end{cases}$$

jossa systeemimatriisi

$$\mathbf{A}(H_s, M_s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,11} & a_{4,12} & a_{4,11} & a_{4,12} \\ 0 & a_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,11} & a_{5,11} & a_{5,13} & a_{5,13} \\ 0 & 0 & a_{6,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,11} & a_{6,12} & a_{6,12} & a_{6,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,11} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11,4} & a_{11,5} & a_{11,6} & a_{11,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{12,4} & a_{11,5} & a_{12,6} & 0 & a_{11,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11,4} & a_{13,5} & a_{12,6} & 0 & 0 & a_{11,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{12,4} & a_{13,5} & a_{11,6} & 0 & 0 & 0 & a_{11,7} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{4,1} &= \frac{-g}{H_s}, & a_{4,11} &= \frac{-Z_s d_1}{H_s M_s}, & a_{4,12} &= \frac{Z_s d_1}{H_s M_s}, \\ a_{5,11} &= \frac{-Z_s d_2}{H_s M_s}, & a_{5,12} &= \frac{Z_s d_2}{H_s M_s}, \\ a_{6,3} &= \frac{4F_s L Z_s d_2}{J_c} - \frac{L^2 M_s g}{H_s J_c}, & a_{6,11} &= \frac{-L Z_s d_1}{J_c}, & a_{6,12} &= \frac{L Z_s d_1}{J_c}, & a_{7,11} &= \frac{-N r}{J}, \\ a_{11,4} &= H_s Z_s d_1 k_s, & a_{11,5} &= H_s Z_s d_2 k_s, & a_{11,6} &= L Z_s d_1 k_s, & a_{11,7} &= \frac{k_s r}{N}, \\ a_{12,4} &= -H_s Z_s d_1 k_s, & a_{12,6} &= -L Z_s d_1 k_s, & a_{13,5} &= -H_s Z_s d_2 k_s, \end{aligned}$$

ja ohjausmatriisit

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{7,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{7,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{7,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{7,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{dm}(H_s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{4,2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{4,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta_{11,1} & 0 & 0 \\ \beta_{11,1} & 0 & 0 \\ \beta_{11,1} & 0 & 0 \\ \beta_{11,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_{7,1} = \frac{N^2}{J},$$

$$\beta_{4,2} = \frac{-1}{H_s},$$

$$\beta_{11,1} = k_s(-1 + H_s Z_s).$$

Mittauksia saadaan taakan sijainnista $x_1 \dots x_3$ sekä apukoneistojen moottorien kulmanopeuksista $x_7 \dots x_{10}$. Näin lähtömatriisiksi tulee

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Myös korkeus ja massa ovat tunnettuja, mutta niitä käsitellään vakioina kussakin tilanteessa. Millään ohjauksella ei ole suoravaikutusta mittaukseen eli ne eivät vaikuta mittaukseen vaikuttamatta ensin tiloihin, joten

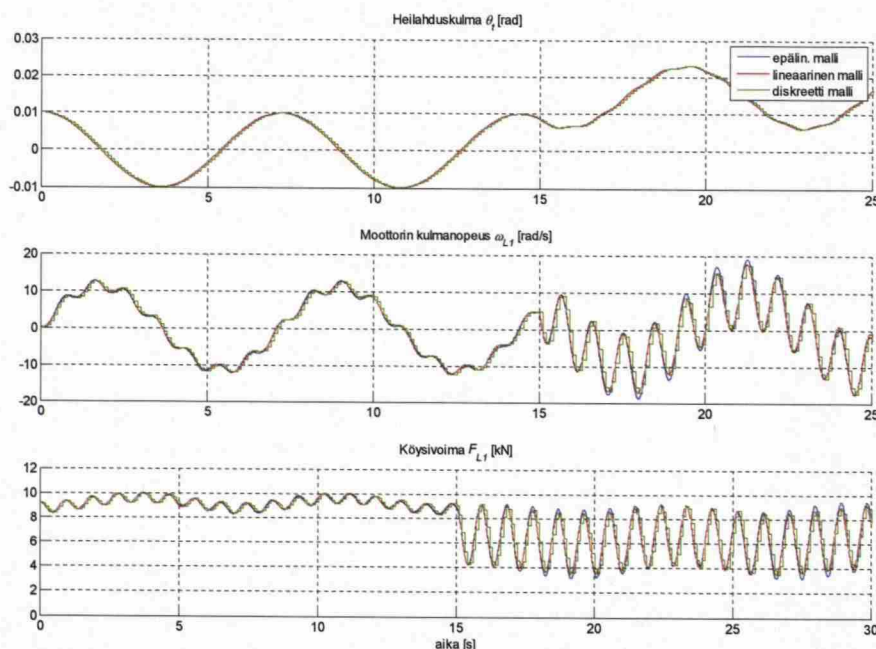
$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{dm} = \mathbf{0}.$$

Aiemmin mainittiin, ettei korkeuden ottaminen tilaksi ole hyödyllistä. Tämä käy ilmi sijoittamalla tasapainotila Jacobin matriisiin \mathbf{J}_{fx} , jolloin nähdään, että tuloksena on nollarivi ja -sarake korkeuden kohdalla. Korkeuden muutos välittyy systeemiin nostonopeuden kautta.

Linearisoitu malli saadaan diskretoitua kaavoilla (50) ja (51). Näytevälin määrää suoraan käytännön toteutus.

6.3.3 Linearisoinnin hyvyyden tarkastelu

Tutkitaan seuraavaksi, kuinka hyvin linearisoitu malli ja siitä diskretoitu versio kuvaavat alkuperäistä epälineaarista mallia. Systeemimatriisi \mathbf{A} riippuu siis linearisointietäisyydestä H_s ja linearisointimassasta M_s . Tehdään vastaava simulointi kuin osiossa 6.2. Valitaan jälleen etäisyys $H = 10$ m ja kontin massa $m_c = 5\,000$ kg.

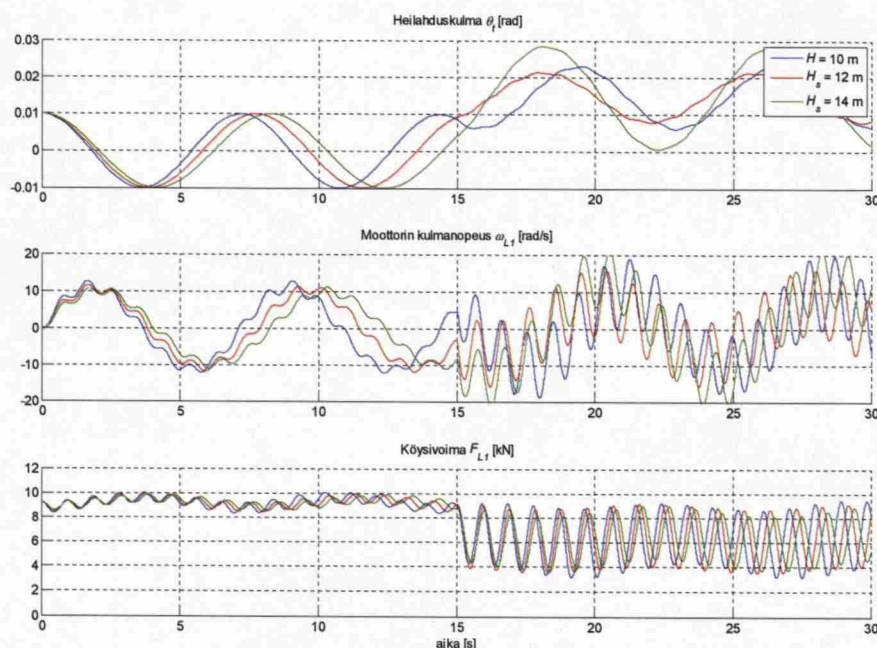


Kuva 25: Simulointi epälineaarilla, linearisoidulla ja diskretoidulla mallilla

Kuvasta 25 nähdään, että lineaarinen malli kuvaa epälineaarista mallia todella hyvin. Taakan heilahtelu on luonnostaan lähellä lineaarista, joten linearisoitu malli kuvaa sitä lähes täydellisesti. Moottorin kulmanopeuden kuvaajat ovat myös käytännössä yhtenevät lukuun ottamatta hitaan värähtelymoodin amplitudihuippuja, joissa niissäkin lineaarinen malli ylittää yli 90 % arvoon. Köysivoimien vastaavuus on vielä moottorien kulmanopeutta parempi.

Lisäsimuloinnit eri korkeuksilla ja massoilla osoittavat, ettei niiden muutoksilla ole juurikaan vaikutusta lineaarisen mallin hyvyyteen. Heilahduskulmat mallintuvat aina täydellisesti riippumatta valitusta etäisyydestä tai massasta. Moottorien kulmanopeudet ja köysivoimat kuvautuvat sitä paremmin, mitä lyhyemmät köydet ovat tai mitä suurempi massa on kyseessä. Tämä pätee sekä samansuuruisten kulmien että samanpituisten siirtymien kohdalla. Toisaalta lyhyemmällä köysillä tai suuremmalla massalla värähtely on nopeampaa, jolloin pitkällä näytteenottovälillä diskretoitu malli ei silmämääräisesti enää seuraa jatkuva-aikaista signaalia hyvin. Diskretoitu malli antaa näytepisteissä kuitenkin täsmälleen samat arvot kuin jatkuva malli, joten tarkasteltaessa diskreettiä signaalia vain näissä pisteissä se on aina yhtä hyvä kuin sen jatkuva versio.

Tutkitaan seuraavaksi, kuinka paljon väärä linearisointietäisyys tai -massa vaikuttaa mallien vastaavuuteen. Valitaan taas epälineaarisen mallin kontin massaksi $m_c = 5\,000$ kg ja etäisyydeksi $H = 10$ m, mutta linearisoidaan malli arvolla $H_s = 12$ m ja arvolla $H_s = 14$ m, jolloin kuormauselin sijaitsee vastaavasti noin yhden tai kaksi kontinkorkeutta alempana. Simuloinnit on esitetty kuvassa 26.



Kuva 26: Väärän linearisointikorkeuden vaikutus ($H = 10\text{--}14\text{ m}$, $m_c = 5\,000\text{ kg}$)

Yllä olevasta kuvasta nähdään, että väärällä linearisointietäisyydellä on huomattavan suuri vaikutus. Väärä etäisyys muuttaa sekä värähtelyn taajuutta että sen amplitudia, joten linearisoitu malli ei enää kuvaa tilannetta tarpeeksi hyvin. Tarvittava linearisointitarkkuus riippuu köysien pituuksista ja myös hieman taakan painosta. Pitkillä köysillä tarkkuuden tulee olla vähintään 1-1,5 metriä ja lyhyillä köysillä jopa 10 senttimetriä. Taakan massan lisääntyessä myös tarkkuusvaatimus kasvaa hieman.

Väärällä linearisointimassalla ei ole yhtä dramaattista vaikutusta. Vaadittava tarkkuus riippuu sekä köysien pituuksista että taakan painosta. Pituuden ja painon kasvaessa vaatimus pienenee. Kontin ollessa kiinni tarkkuusvaatimus on noin yhdestä tonnista (lyhyet köydet, kevyt taakka) jopa 20 tonniin (pitkät köydet, raskas taakka). Sallitut virheet ovat myös kiinni virheiden suunnista.

Linearisoidessa on syytä muistaa, että saatu malli toimii kelvollisesti vain linearisointipisteen ympäristössä. Kuormauselimen toiminta-alueeksi voidaan valita esimerkiksi 50 cm kumpaankin suuntaan, mikä on ilman muuta riittävä alue kontin poimintaan tai paikoitukseen. Simuloinnit osoittavat, että lineaarinen malli on varsin hyvä tällaisellekin poikkeamalle riippumatta korkeudesta tai massasta. Tätä suuremmat siirrot tehdään liikuttamalla pukkia tai vaunua.

Yhteenvedona todetaan, että malli riippuu voimakkaasti linearisointikorkeuden tarkkuudesta ja merkittävästi myös linearisointimassan tarkkuudesta. Tästä johtuen malli on linearisoitava erikseen jokaiselle massalle ja (kontin monikerran) korkeudelle. Tarkkuusvaatimukset riippuvat vallitsevasta massasta ja korkeudesta. Jos ne arvioidaan riittävän lähelle todellisia arvoja, lineaarinen malli riittää hyvin approksimoimaan epälineaarista mallia.

7 Kuormauselimen paikan säätö simulointiympäristössä

Tässä luvussa suunnitellaan sekä tilasäätö että PID-säätö luvussa 6 esitetyle mallille, jolla kuvataan apukoneistojärjestelmän ja kuormauselimen keskinäisiä riippuvuuksia. Säädinten suunnitteluun ja toiminnan testaamiseen käytetään MATLAB-ohjelmistoa ja sille tehtyä Simulink-ohjelmaa.

Säätösuunnittelun lähtökohtana on, ettei pukkia eikä vaunua liikuteta kuormauselimen ohjauksen aikana. Näin kuormauselimen paikkaan voidaan vaikuttaa ainoastaan muuttamalla apukoneistojen moottorien momentteja. Pukin ja vaunun kiihtyvyyksiä käsitellään mitattavina häiriöinä, joista voidaan tarvittaessa helposti tehdä myötäkytkentä niiden vaikutusten kompensoimiseksi.

Kuormauselimen paikkaa ohjaavat säätimet toteutetaan tietojärjestelmässä S2, ja niiden suunnittelussa käytetään diskreettejä menetelmiä. Järjestelmän laskemat ohjaukset ja osa mittauksista kulkee järjestelmän S1 kautta, kuten aiemmin kuvassa 20 esitettiin. Järjestelmään S1 on myös toteutettu nykyinen heilahduksenhallinta, jota hyödynnetään sellaisenaan PID-säädön yhteydessä. Tilasäädön tapauksessa se on joko kytkettävä pois päältä tai lisättävä mallin yhtälöihin, jonka jälkeen säätösuunnittelu on tehtävä uudelleen.

Osiassa 7.1 esitetään tilasäätimen ja osiassa 7.2 PID-säätimen muodostaminen. Tilasäätö perustuu Kalman-suotimella estimoidun tilavektorin ja LQ-servosäätimen yhdistelmään. PID-säätö perustuu puolestaan kolmeen rinnakkaiseen PI-säätimeen ja nykyisen heilahduksenhallinnan yhdistelmään. Säädinten suunnittelua hankaloittavat ja samalla niiden suorituskykyä rajoittavat mittaus- ja ohjaussignaaleiden viiveet sekä apukoneistojen moottorien rajatut momenttialueet ja momenttiohjeiden sallitut muutosnopeudet. Kummankin säädön säätimien parametrit riippuvat nostoköysien pituuksista ja kontin massasta, joten säädinten parametreja tulee päivittää näiden muuttuessa. Osiossa 7.3 säätöratkaisuja ja niiden suorituskykyä verrataan toisiinsa.

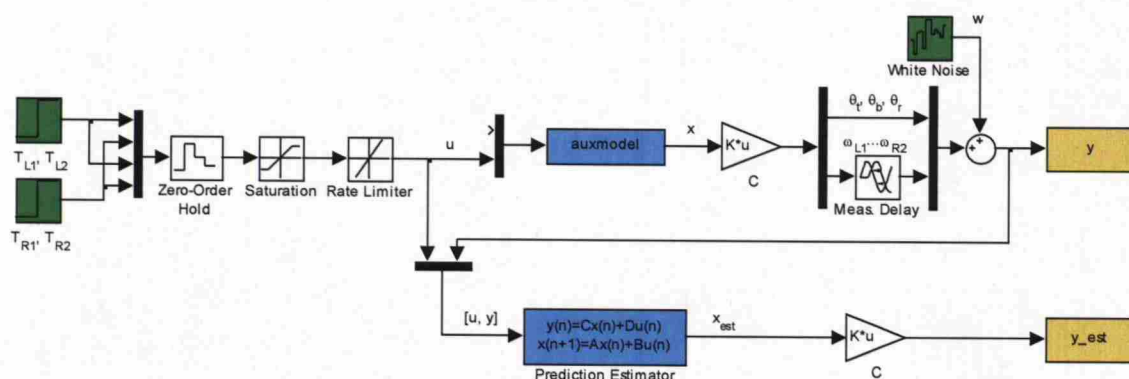
7.1 Tilasäätö

Tilasäätimen vaatimuksena on, että koko tilavektori on saatavilla. Koska mittauksia saadaan vain osasta tiloista, on käytettävä tilatarkkailijaa, jollainen toteutetaan alaosiassa 7.1.1. Samalla myös esitetään, kuinka mittausviiveen vaikutuksesta päästään eroon. Tilatarkkailijaksi valitaan prediktiivinen tilatarkkailija ja sen vahvistusmatriisiina käytetään Kalman-suodinta. Alaosiassa 7.1.2 toteutetaan ohjausviiveen huomioiva LQ-servosäädin, jolla kuormauselimen heilahduskulmat saadaan ajettua haluttuihin arvoihin. Pysyvän poikkeaman poistamiseksi säätimeen lisätään alaosiassa 7.1.3 vielä integrointiosa.

7.1.1 Tilatarkkailija

Tehdään kuvan 27 mukainen Simulink-malli tilojen \mathbf{x} estimoimiseksi. Apukoneistojen dynaaminen malli on toteutettu edelleen *auxmodel*-lohkoon. Se saa syötteen \mathbf{u} , joka on neliäkiöinen vektori pitäen sisällään momenttiohjeet kullekin moottorille. Ohjauksen diskretoimiseksi käytetään nollannen kertaluvun pitopiiriä. Tietokoneen käyttämä näytteenottoväli on h . Taajuusmuuttajien ominaisuudet lisäksi rajoittavat momenttiohjeen ääriarvoja ja muutosnopeutta.

Prosessista saadaan mittausvektori \mathbf{y} , joka koostuu heilahduskulmista θ_l , θ_b , θ_r ja moottorien kulmanopeuksista ω_{L1} , ω_{R1} , ω_{L2} , ω_{R2} . Moottorien kulmanopeustiedot viivästyvät apukoneistojen ja S1:n välisen siirtoviiveen takia lähes kokonaisen näytteenottovälin h . Mittauksiin myös summautuu valkoista kohinaa \mathbf{w} .



Kuva 27: Tilatarkkailija Simulink-mallissa

Valitaan tilatarkkailijaksi prediktiivinen tilatarkkailija, joka ei ole niin aikakriittinen kuin uusinta mittausta käyttävä tarkkailija. Tarkkailijan mallina on alaosiossa 6.3.2 esitetyn tilaesityksen diskretoitu versio. Tilatarkkailijalle menee syötetty ohjaus \mathbf{u} ja kohinainen mittaus $\mathbf{y} + \mathbf{w}$ ja sen ulostulona on tilaesityksen tilojen \mathbf{x} estimaatit $\hat{\mathbf{x}}$. Tilatarkkailijan Kalman-suotimen suunnittelua varten tulee intensiteettimatriisit \mathbf{R}_k ja \mathbf{Q}_k määrittää. Arvioidaan mittausten intensiteettien eli varianssien olevan

$$\mathbf{R}_k = \text{diag}(0.002^2, 0.002^2, 0.05^2, 1^2, 1^2, 1^2, 1^2).$$

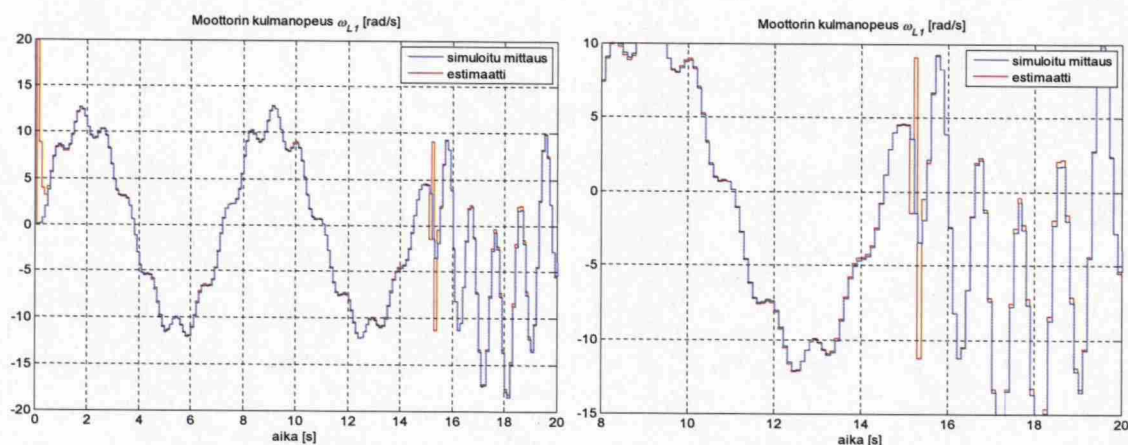
Todellisuudessa mittaaminen on usein tätä tarkempaa, mutta suunnittelussa on yleensä parempi aliarvioida kuin yliarvioida mittaustarkkuutta. Intensiteetteja tulkitaan niin, että niiden neliöjuuret ovat keskihajontoja, jolloin noin 68 % mittauksista on korkeintaan tämän etäisyydellä todellisesta arvosta. Esimerkiksi heilahduskulmien θ_l , θ_b keskihajonnoiksi oletetaan 0,002 radiaania. Jos nostoköysien pituudet ovat 5 metriä, on keskihajonta etäisyydeksi muutettuna tällöin 1 cm. Kohinan keskihajonta kasvaa lineaarisesti, joten 20 m köysillä hajonta on 4 cm. Rotaatiokulman mittaaminen on epätarkempaa, joten sen keskihajonaksi arvioidaan 0,05 radiaania eli noin 3° kaikilla etäisyyksillä. Moottorien kulmanopeuksien hajontojen oletetaan olevan 1 rad/s.

Mallin hyvyyden arviointi ilman todellista dataa on hankalaa. Mutta koska mittausten oletetaan olevan varsin luotettavia, ei mallin painokertoimilla ole suurta merkitystä. Mitä suuremmiksi tilojen intensiteetit valitaan, sitä enemmän tilatarkkailija luottaa mittauksiin. Käytetään mallille intensiteetteja

$$\mathbf{Q}_k = \text{diag}(0.4^2, 0.4^2, 0.15^2, 0.04^2, 0.04^2, 0.015^2, 5^2, 5^2, 5^2, 5^2, 2000^2, 2000^2, 2000^2, 2000^2).$$

Kun \mathbf{Q}_k ja \mathbf{R}_k on valittu, voidaan tarkkailija toteuttaa kaavojen (52), (56), (60), (61) mukaisesti. Kokeillaan ensin tarkkailijan toimintaa, kun mittauskohina poistetaan mallista. Tehdään sama simulointi kuin osiossa 6.2 ja piirretään moottorin kulmanopeus ω_{L1} ja sen estimaatti kuvaan 28. Moottorin kulmanopeuden valitseminen tarkasteltavaksi mittaukseksi heilahduskulman sijaan tehdään siksi, että heilahduskulmissa muutoksia tapahtuu selvästi rauhallisemmin, jolloin niiden estimointi onnistuu helposti virheettömästi.

Kuvasta 28 nähdään, että tarkkailija toimii moitteetta, kun ohjaukseen ei tehdä muutosta. Pienet erot simuloidun mittauksen ja estimoidun mittauksen välillä johtuvat linearisoinnin vaikutuksesta. Vaikka tarkkailijan alkutilana on nollatila, se saavuttaa oikean tilan jo alle sekunnin kuluessa. Käytännössä tarkkailijan alkuarvona käytettäisiin realistisempaa arvoa, jolloin oikea tila saavutettaisiin vieläkin nopeammin. Tarkkailijaa ei myöskään tarvitse nollata missään vaiheessa, joten alkutilanteella ei ole käytännön merkitystä.



Kuva 28: Tilatarkkailija estimoi mittaukset moitteetta, mutta häiriintyy mittausviiveellisessä järjestelmässä ohjauksen muuttuessa

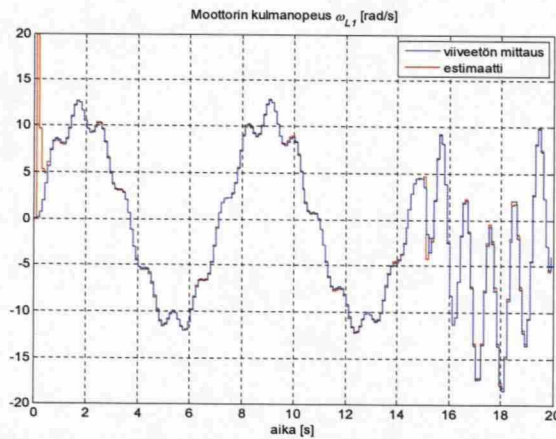
Ohjausmuutoksella estimaatti kuitenkin häiriintyy pahoin. Tämä johtuu siitä, että tarkkailija luottaa viivästyneeseen mittaukseen oman mallinsa sijaan. Koska aktiivisessa säädössä ohjaussuure muuttuu jatkuvasti, ei tällaista tarkkailijaa voisi käyttää viiveellisen mittauksen tapauksessa. Onnistuessaankin estimaatti kuvaa vain viivästyntä mittausta viiveettömän sijaan.

Kuvan 28 häiriö saadaan kompensoitua ottamalla viive huomioon tilatarkkailijassa. Tätä varten tarkkailijaan lisätään tiloja yhtälöiden (62) ja (64) mukaisesti. Koska viive on

vähemmän kuin yksi näytteenottoväli h , riittää yhden tilan lisääminen kutakin viivästynyttä mittausta kohden. Tarkkailijan käyttämäksi tilaesitykseksi saadaan nyt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh+h) \\ \mathbf{y}_{1d}(kh+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh) \\ \mathbf{y}_{1d}(kh) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(kh), \quad (97)$$

jossa siis \mathbf{y}_{1d} sisältää yhden näytteenottovälin viivästyneet mittaukset apukoneistojen moottorien kulmanopeuksista. Kun uudella tilatarkkailijalla tehdään edelleen sama simulointi ja verrataan sen antamaa estimaattia viivästymättömästä tilasta simuloituun (kuva 29), nähdään häiriön poistuneen lähes kokonaan. Jatkossa tätä tilatarkkailijaa voidaan käyttää tilasäätimen yhteydessä viiveettömän mittauksen generointiin ja täyden tilavektorin estimaatin luomiseen.



Kuva 29: Laajennettu tilatarkkailija estimoi viiveettömän mittauksen

Alussa tehtiin oletus, että mittaukset ovat kohinattomia. Tämän oletuksen poistamisella ei ole juuri vaikutusta estimoituun tilaan, sillä kohina huomioitiin tilatarkkailijan suunnittelussa. Tuloksena saadaan toimiva suodatettu tilaestimaatti, kunhan mittauksen kohina on valkoista ja sen intensiteetti pystytään arvioimaan.

7.1.2 LQ-servosäädin

Tehdään edellisessä alaosiossa esitetylle systeemille tilasäädin. Koska systeemi on korkeaa astetta eikä sen redusointi fysikaalisten suureiden vuoksi ole mielekäs, valitaan käytettäväksi LQ-säädin. Tämän vuoksi valitaan kuvan 11 mukainen rakenne, jossa regulaattori on sijoitettu takaisinkytkentähaaraan ja jossa referenssitilalle on oma säätimensä. Laajennetaan nyt kuvan 27 systeemiä mainitulla säädinrakenteella. Saatu säätökaavio on esitetty kuvassa 30. Ohjaus kulkee S1:n kautta apukoneistoille, jonka vuoksi ohjaukseen syntyy lähes näytevälin h mittainen viive.

tuloon summataan termi, jossa matriisi \mathbf{K}_f kertoo referenssitilaa \mathbf{x}_r . Ilman jälkimmäistä osaa prosessi menisi nollatilaan. Suunnittelutehtäväksi jää valita tilojen painomatriisi \mathbf{Q} ja ohjausten painomatriisi \mathbf{R} siten, että säätötulos on riittävän hyvä. Yksinkertaistetussa tapauksessa painomatriiseja pidetään vakiona riippumatta köysien pituuksista tai kontin massasta. Näin yhden virityksen tekeminen voi riittää kattamaan kaikki tilanteet, joskaan säätö ei välttämättä toimi aina ihanteellisesti. Tosin säädinmatriisit \mathbf{K} ja \mathbf{K}_f kyllä päivittyvät, sillä ne riippuvat systeemimatriisista $\mathbf{A}(H_s, M_s)$.

Tehdään viritys valitsemalla nostoetäisyydeksi $H = 10$ m ja kontin massaksi $m_c = 5\,000$ kg. Käyttämällä alkuarvaukseen Brysonin menetelmää ja jatkamalla suunnittelua yritys-erehdys-menetelmällä löydetään helposti matriisit

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \text{diag}(10^6, 10^6, 10^6, 10^5, 10^5, 10^5, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, \\ &\quad 5 \cdot 10^{-7}, 5 \cdot 10^{-7}, 5 \cdot 10^{-7}, 5 \cdot 10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-5}, 10^{-5}, 10^{-5}), \\ \mathbf{R} &= \text{diag}(0.05, 0.05, 0.05, 0.05).\end{aligned}$$

Tiloissa painotetaan erityisesti heilahduskulmia θ_t , θ_b ja θ_r . Suuret kustannukset heilahduskulmanopeuksille pienentävät ylitystä ja samalla vähentävät värähtelyä. Sen sijaan moottorien kulmanopeuksista ei kannata rankaista paljoa, sillä vaikka lopputilassa moottorien halutaankin olevan paikoillaan, suuri kustannus ajon aikana hidastaa säädettyä ulostuloa. Vääristä köysivoimista ei myöskään haluta rankaista, sillä niiden määrittäminen on kaikista epävarmintä. Käytetty kustannus kuitenkin auttaa löytämään oikean lopputilan nopeammin. Matriisin \mathbf{Q} viimeiset neljä diagonaalialkiota, jotka painottavat edellisiä ohjauksia, valitaan niin pieniksi, etteivät ne vaikuta kokonaiskustannukseen. Ohjauksia nimittäin painotetaan matriisin \mathbf{R} kautta, jonka diagonaali valitaan siten, etteivät ohjaukset saturoidu pahoin. Samalla ohjauksiin ei myöskään tule hyvin nopeita muutoksia.

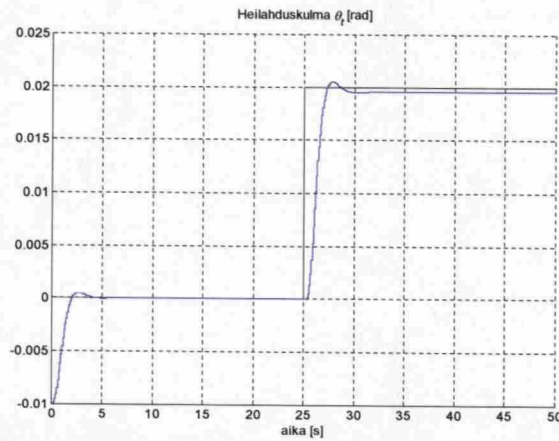
Tehdään lopuksi esimerkkisimulointi. Asetetaan prosessille seuraavat alkuarvot: nostoetäisyys $H = 10$ m, kontin massa $m_c = 5\,000$ kg ja heilahduskulma $\theta_t = -0.01$ rad. Muut heilahduskulmat, niiden kulmanopeudet ja moottorien nopeudet ovat nolliä. Apuköysissä pidetään aluksi perusjännitys F_0 . Tilatarkkailija lähtee samasta tilasta kuin prosessikin. Tämä oletus voidaan tehdä, sillä tarkkailija saavuttaa prosessin tilan hyvin lyhyessä ajassa alkutilanteesta riippumatta. Tilatarkkailijan viivästyneiden ohjausten alkuarvoina on perusmomentti T_0 .

Referenssitilana \mathbf{x}_r on aluksi köysivoimia, F_0 , lukuun ottamatta nollatila ja hetkellä 25 s siihen tehdään askelmuutos $\theta_{t,ref} = 0.02$ rad. Köysivoimille saadaan laskettua uudet referenssit yhtälöistä (92) olettamalla, että vastakkaisiin köysiin tehdään samansuuruiset, vastakkaismerkkiset voimamuutokset. Korjaustermit perusvoimaan F_0 nähdään taulukosta 6. Mikäli useamman kuin yhden kulman asetusarvo eroaa nollasta, lasketaan nämä korjaustermit yhteen.

Taulukko 6: Perusköysivoimaan F_0 tehtävät korjaukset uuden köysivoimareferenssin muodostamiseksi

	kulma $\theta_{t,ref}$	kulma $\theta_{b,ref}$	kulma $\theta_{r,ref}$
$F_{L1,ref}$	$-F_{diff}$	$-F_{diff}$	$-F_{diff}$
$F_{R1,ref}$	$+F_{diff}$	$-F_{diff}$	$+F_{diff}$
$F_{L2,ref}$	$-F_{diff}$	$+F_{diff}$	$+F_{diff}$
$F_{R2,ref}$	$+F_{diff}$	$+F_{diff}$	$-F_{diff}$
F_{diff}	$\frac{Mg}{4Zd_1} \sin \theta_{t,ref}$	$\frac{Mg}{4Zd_2} \sin \theta_{b,ref}$	$\frac{LMg\theta_{r,ref}}{4HZd_1 \cos \theta_{r,ref}} - \frac{d_2}{d_1} F_0 \tan \theta_{r,ref}$

Saatu heilahduskulman θ_t vaste on esitetty kuvassa 31. Kulma seuraa asetusarvoaan hyvin, mutta sen nolasta eroavilla arvoilla erosuureeseen jää pysyvä poikkeama.



Kuva 31: Kulma θ_t seuraa asetusarvoaan, mutta erosuureeseen jää pysyvä poikkeama

Mitä suuremmaksi asetusarvo valitaan, sitä suuremmaksi lopputilan virhe jää. Tämän virheen ja samalla mallintamattomien häiriöiden ja mallivirheiden poistamiseksi säätimeen lisätään seuraavassa alaosiossa vielä integrointiosa.

7.1.3 Integraalitermien lisääminen

Pysyvän poikkeaman poistamiseksi LQ-säätimeen lisätään lopuksi integrointiosa kaavojen (79) ja (80) mukaisesti. Regulaattorin käyttämä laajennettu tilaesitys on siten

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh+h) \\ \mathbf{x}_I(kh+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ -\frac{18 \times 18}{h} \mathbf{I} & \frac{18 \times 3}{h} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kh) \\ \mathbf{x}_I(kh) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(kh) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{18 \times 1}{h} \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r}(kh),$$

jossa termi \mathbf{x}_I sisältää asetusarvojen $\theta_{t,ref}$, $\theta_{b,ref}$, $\theta_{r,ref}$ ja heilahduskulmien θ_t , θ_b , θ_r välisten erosuureiden integraalit. Integrointitermit lisätään Simulink-malliin kuvassa 32 esitetyllä tavalla.

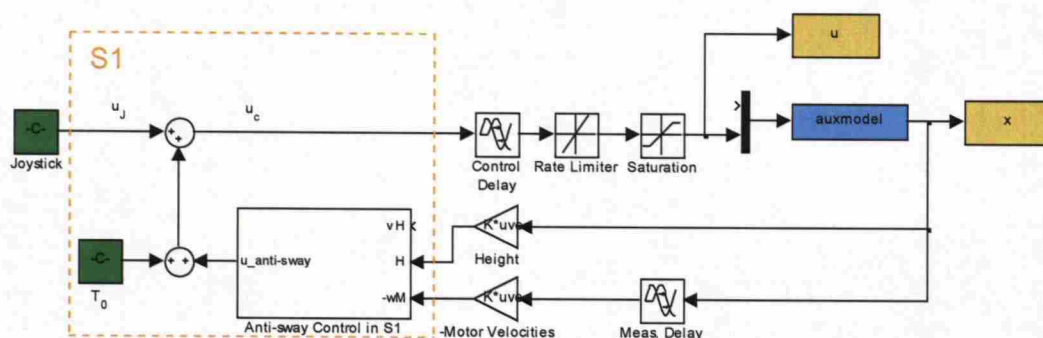
7.2 PID-säätö

Tässä osiossa kuormauselimen paikan ohjaamiseksi suunnitellaan PID-säädin. Ensin alaosiossa 7.2.1 tutustutaan nykyiseen heilahduksenhallintaan, jonka tarkoitus on vain estää taakan heilahtelu. Tämän rinnalle alaosiossa 7.2.2 suunnitellaan PI-säätimet, joiden avulla kuormauselin saadaan ajettua haluttuun kohtaan. Alaosiossa 7.2.3 samat säätimet esitetään kaskadisäädön tutummassa muodossa.

7.2.1 Nykyinen heilahduksenhallinta

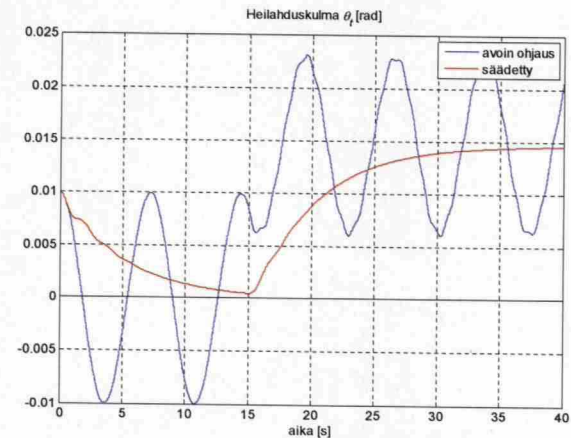
Nykyisissä konttinostureissa apukoneistojärjestelmällä tehtävä heilahduksenhallinta on toteutettu järjestelmään S1 mukautetulla P-säädöllä moottorien kulmanopeuksista. Säätöpiiri on esitetty kuvassa 34. Säätö kuolettaa heilahtelun, joten ilman ulkoisia voimia kuormauselin asettuu keskelle vaunua. S1 myös antaa apukoneistojen moottoreille massasta riippuvan perusmomentin T_0 . Lisäksi nosturin kuljettaja voi vaikuttaa kuormauselimen paikkaan ohjauksavalla annettavalla signaalilla u_j .

Simulink-kaavion ohjaukset ovat siis nelialkioisia vektoreita, jotka sisältävät momenttiohjeet kullekin moottorille. Siirtoviiveen takia S1:n lähettämät ohjaukset ja luetut moottorien kulmanopeudet viivästyvät. Koska taajuusmuuttajien ominaisuudet lisäksi rajoittavat lasketun kokonaisohjauksen u_c muutosnopeutta ja ääriarvoja, on toteutunut ohjaus u .



Kuva 34: Heilahduksenhallinnan säätökaavio

Tehdään nyt heilahduksenhallinnan ollessa päällä sama simulointi kuin osiossa 6.2, jossa kuormauselimen annettiin ensin heilahdella vapaasti ja sen jälkeen apukoneistojen moottorien momentteihin tehtiin yksi askelmuutos. Saatua tulosta on kuvassa 35 verrattu säätämättömään järjestelmään. Kuvasta nähdään hyvin, kuinka tehokkaasti heilahduksenhallinta kuolettaa heilahtelun.

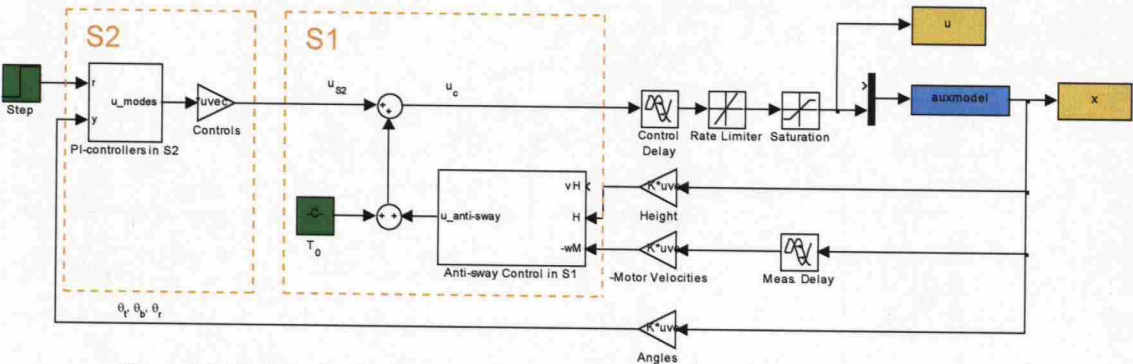


Kuva 35: Heilahduksenhallinta stabiloii heilahtelun

7.2.2 PI+D-säätö

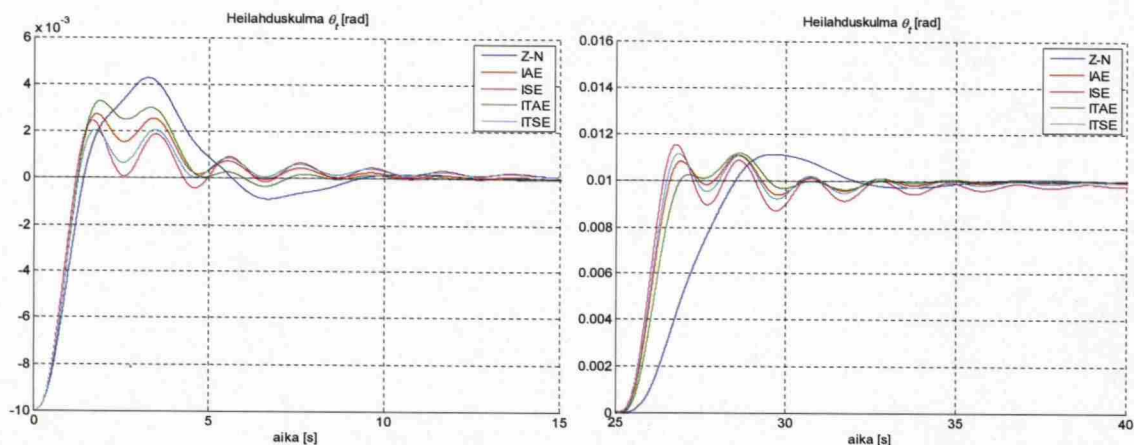
Paikkasäätöä ei voida toteuttaa suoraan järjestelmässä S1, sillä mittaukset kuormauselimen ja kontin paikasta menevät järjestelmälle S2 (kuva 20). Kuormauselimen paikan ohjaus S2:lla on kuitenkin kannattavaa tehdä käytössä olevan heilahduksenhallinnan yhteyteen. Näin paikkasäätö voidaan tarvittaessa myös ottaa pois päältä S1-ohjauksen siitä mitenkään häiriintymättä.

Lisätään paikkasäätö kuvaan 34 edellä mainituin perustein kuvan 36 mukaisesti. Oletetaan lisäksi, että mittaukset ovat kohinattomia. Tämä on perusteltua, koska kohinoiden intensiteetit ovat hyvin pieniä. S1-säädön voidaan ajatella vastaavan PID-säätimen D-osaa, sillä nopeus on paikan derivaatta. Tästä syystä paikkasäätimeksi riittää PI-säädin. Integrointiosa on välttämätön, jottei paikkaan jäisi pysyvää poikkeamaa. Kun PI- ja D-säädin summataan yhteen, on tuloksena PID-säädin.



Kuva 36: Kokonaisohjaus on paikkasäädön (S2) ja nopeussäädön (S1) summa

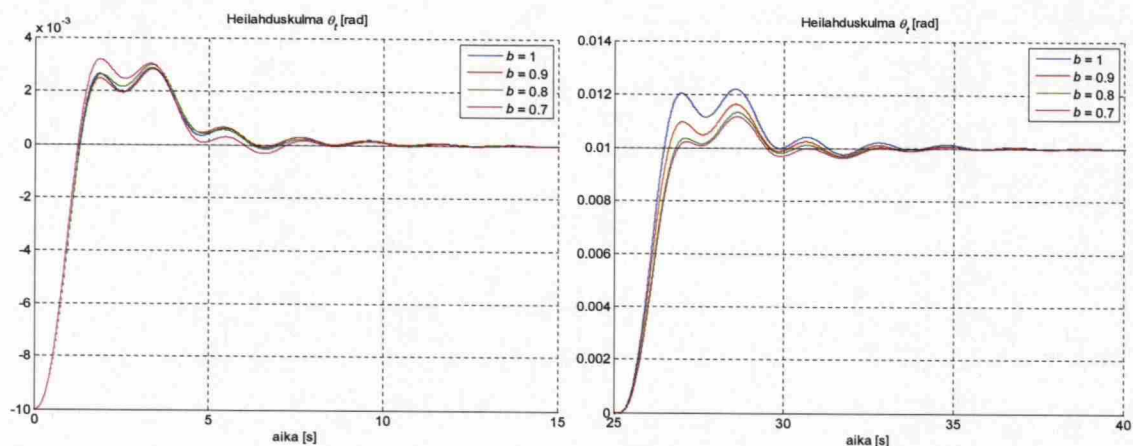
Diskreetti taaksepäin integroiva PI-säädin on toteutettu kuvan 37 mukaisesti. Sisääntulot r ja y ovat kolmialkioisia vektoreita, joissa kulkevat tiedot taakan referenssikulmista $\theta_{t,ref}$, $\theta_{b,ref}$, $\theta_{r,ref}$ ja mitatuista kulmista θ_t , θ_b , θ_r . Vektorimuodosta johtuen lohkoissa on itse asiassa kolme rinnakkaista PI-säädintä, eli jokaiselle kulmalle θ_t , θ_b , θ_r on oma säätimensä. Lohkon ulostulona on yksi ohjausarvo kullekin kulmalle.



Kuva 41: Kustannuskriteerien vertailua

Zieglerin ja Nicholsin värähtelyrajamenetelmä ehdottaa pienen b :n ja myös muita menetelmiä pienemmän vahvistuksen K_P käyttöä. Näitä kompensoidaan suurella integraaliosalla. Näin säätö reagoi muuta hitaammin asetusarvon muutoksiin, ja suuresta integrointiosasta johtuen vasteeseen tulee helposti muuta suurempi ylitys. ISE-kriteeri tuottaa odotetusti lyhimmän nousuajan, mutta samalla eniten värähtelyä. ITAE-kriteeri eroaa muista kustannuskriteereistä ollen välimuoto niiden ja Zieglerin ja Nicholsin menetelmän välillä. Kuten alaosiassa 4.2.5.2 ennustettiin, erosuureen neliöinti lyhentää nousuaikaa ja aiheuttaa samalla enemmän värähtelyä. Vastaavasti ajalla kertominen pidentää nousuaikaa rauhoittaen värähtelyä. Kaiken kaikkiaan eri kustannuskriteerien tuottamat säädinparametrit eivät kuitenkaan merkittävästi eroa toisistaan. Kaikki tuottavat nopean nousuajan ja värähtelevän vasteen. Värähtely kuitenkin vähenee oleellisesti massaa kasvattamalla. Oletettavasti myös todellisessa tilanteessa vaikuttavat kitkat ja muut mallintamattomat vaimentavat voimat vähentävät värähtelyä.

Tutkitaan seuraavaksi kertoimen b vaikutusta. Kiinnitetään tarkasteltavaksi kriteeriksi ITAE, koska se antaa sekä teoriassa että simuloiden sopivimman vasteen. Optimoidaan säätimen parametrit K_P ja K_I eri b :n arvoilla ja tarkastellaan näiden antamia vasteita, kun siis $H = 10$ m ja $m_c = 5\,000$ kg.

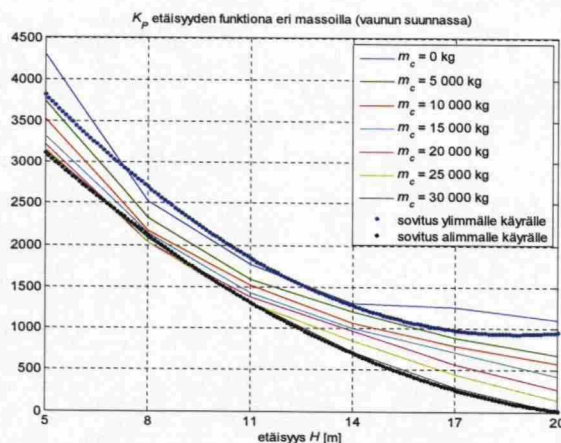


Kuva 42: Kertoimen b vaikutus vasteeseen

Kuvasta 42 nähdään, ettei termillä b ole merkittävää vaikutusta. Termi vaikuttaa lähinnä nousuaikaan ja ylitykseen. Koska b kertoo ainoastaan referenssiä, ei sillä ole vaikutusta ollenkaan, kun referenssi on nolla. Pienet erot kuvan vasemmalla puolella johtuvat vain säätimen muiden parametrien eroista. Kun referenssi poikkeaa nolasta, on vaste sitä rauhallisempi, mitä pienempi b on. Koska todellisessa nosturissa värähtely ei ole suotavaa, on kannattavaa valita $b < 1$.

Jatketaan vaunun liikesuuntaisen PI-säätimen virittämistä tutkimalla lopuksi etäisyyden H ja kontin massan m_c vaikutusta säätimen parametreihin. Kustannuskriteeriksi on siis valittu ITAE. Kun köysien pituuksia ja kontin massaa varioidaan kaikilla realistisilla arvoilla, saadaan kriteerin mukaan arvoja $0,65 \leq b \leq 1$. Koska optimoiduilla b :n arvoilla ei ole näkyvää riippuvuutta etäisyyteen eikä massaan, valitaan käytettäväksi aina $b = 0,8$, joka antaa usein silmämääräisestikin hyvän vasteen. Tämä kiinnitys hieman yksinkertaistaa säätimen muiden parametrien K_P ja K_I valintaa.

Kun kerroin b on kiinnitetty, nähdään optimaalisen vahvistuksen muuttuminen etäisyyden funktiona eri massoilla kuvasta 43. Itse asiassa vahvistukset eivät juuri laisinkaan eroa tilanteesta, jossa myös b :n annetaan vaihdella vapaasti. Vahvistukset ovat massoista riippumatta hyvin samankaltaisia. Lyhyillä köysillä tarvitaan pitkiä köysiä suurempaa vahvistusta. Massan muutoksella ei ole vahvistukseen niin suurta merkitystä. Pienemmällä massalla säätö on kuitenkin mahdollista virittää raskaampaa taakkaa tiukemmaksi eli voidaan käyttää suurempaa vahvistusta.



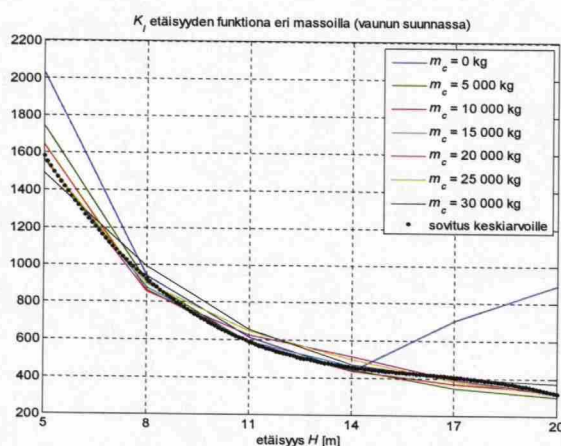
Kuva 43: Vahvistuksen K_P käyttäytyminen eri etäisyyksillä ja massoilla vaunun liikesuunnassa

Nollavahvistus pisimmillä köysillä ja raskaimmalla taakalla johtuu toimilaitteiden saturoitumisesta eikä säätötulos ole tällöin paras mahdollinen. Suurimmalla kuormalla saturoitumista alkaa tapahtua, kun köyden pituudet kasvavat reiluun kymmeneen metriin. Kuormalla 25 000 kg toimilaitteet saturoituvat vasta 20 m köysillä. Jos saturoituminen poistetaan, kyseiset vahvistukset kasvavat hieman, jolloin siis kuvan alin käyrä nousee loppupäästään lähemmäs muita.

Kuvaan 43 on piirretty myös ylimpään ja alimpaan vahvistuskäyrään sovitettut toisen asteen funktiot. Saadut käyrät on esitetty kuvassa sinisenä ja mustana pisteviivana. Ideana on laskea näiden kahden funktion avulla sopiva vahvistus tunnetulla etäisyydellä

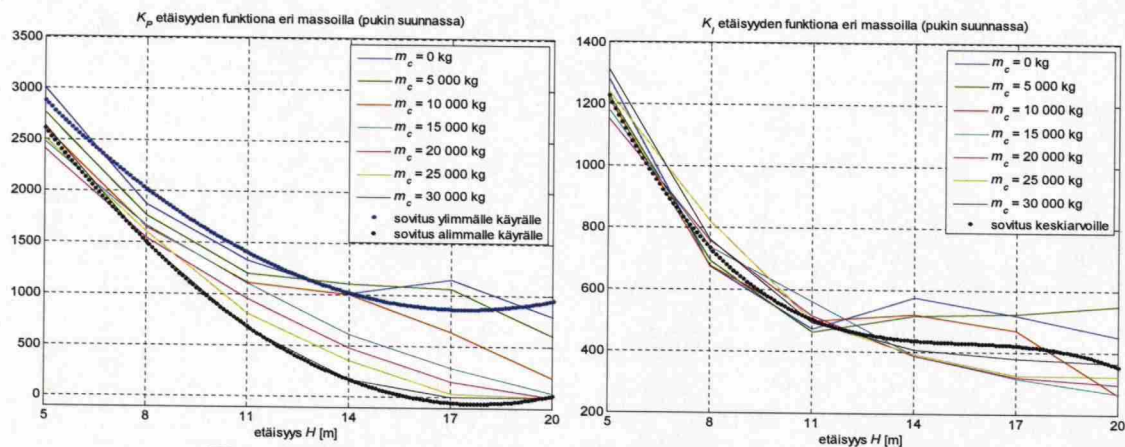
ja massalla. Sijoittamalla etäisyys funktioihin saadaan sekä pienin että suurin käytettävissä oleva vahvistus määrättyä. Lopuksi säätimen käyttämä vahvistus lasketaan näistä kahdesta arvosta lineaarisesti massan avulla. Toisin sanoen pienimmällä massalla käytetään suurinta mahdollista käytettävissä olevaa vahvistusta, suurimmalla massalla vastaavasti pienintä vahvistusta ja massojen puolivälissä suurimman ja pienimmän vahvistuksen keskiarvoa.

Vastaavasti ITAE-kriteerillä optimoidut integraalin kertoimet K_I köysien pituuksien ja kontin massan muuttuessa on esitetty kuvassa 44. Kuvasta nähdään, ettei massan muutoksella ole lainkaan niin suurta merkitystä kuin vahvistuksen tapauksessa. Tästä johtuen on kertoimen valintaa mahdollista yksinkertaistaa käyttämällä kullekin etäisyydelle aina samaa kerrointa. Kertoimen valitsemiseksi on kuvaan piirretty mustalla pisteiviivalla myös käyrien keskiarvoihin sovitettu kolmannen asteen funktio.

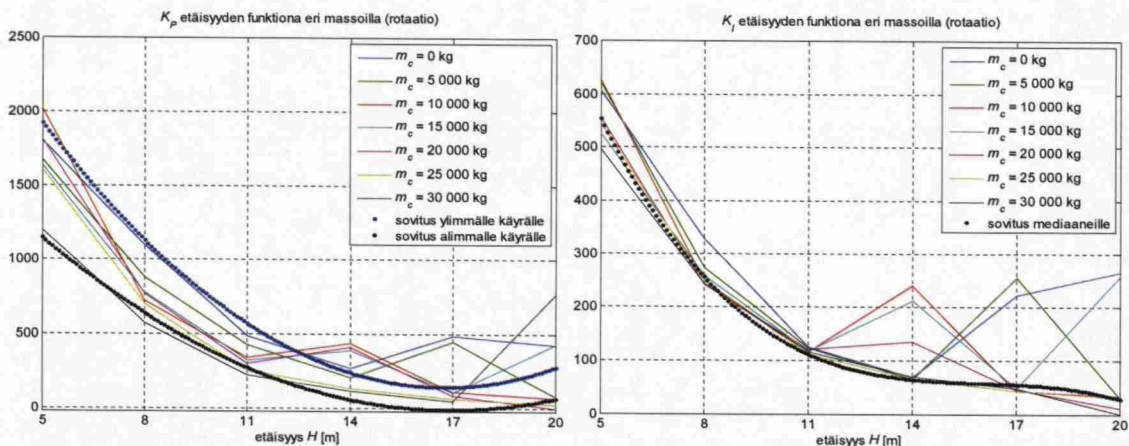


Kuva 44: Integraalin kerroin K_I etäisyyden ja massan funktiona vaunun liikesuunnassa

Kun sama tarkastelu tehdään myös pukin liikesuuntaiselle heilahdukselle sekä rotaatiolle, saadaan kuvissa 45 ja 46 esitetyt kertoimet. Termi b on kummassakin tapauksessa 0,85. Rotaatiossa askeleen koko on 0,1 rad, joka vastaa paremmin realistista asetusarvoa.



Kuva 45: Kertoimet K_P ja K_I pukin liikesuuntaisessa säätimessä



Kuva 46: Kertoimet K_p ja K_i rotaatiosäätimessä

Rotaatiosäätimen kertoimissa esiintyvät poikkeavat arvot johtuvat siitä, että tällöin ensimmäinen askel ei ole asettunut, jonka seurauksena kuormauselin sattuu samaan sopivasti vauhtia toiseen askeleeseen. Tuloksena on vahvasti värähtelevä tai jopa epästabiili vaste. Virheellisten arvojen ei anneta vaikuttaa käytettäviin vahvistuksiin hakemalla sopiva sovitus vahvistuksen ylemmälle käyrälle ja käyttämällä integraalin tapauksessa mediaania.

Toimilaitteiden saturoituminen pukinsuuntaisessa säätimessä on täysin samanlaista kuin vaunusuuntaisessa säätimessä. Sen sijaan rotaatiosäädössä ohjaus saturoituu kyseisellä asetusarvon muutoksella kaikilla etäisyyksillä, kun $m_c > 25\,000\text{ kg}$.

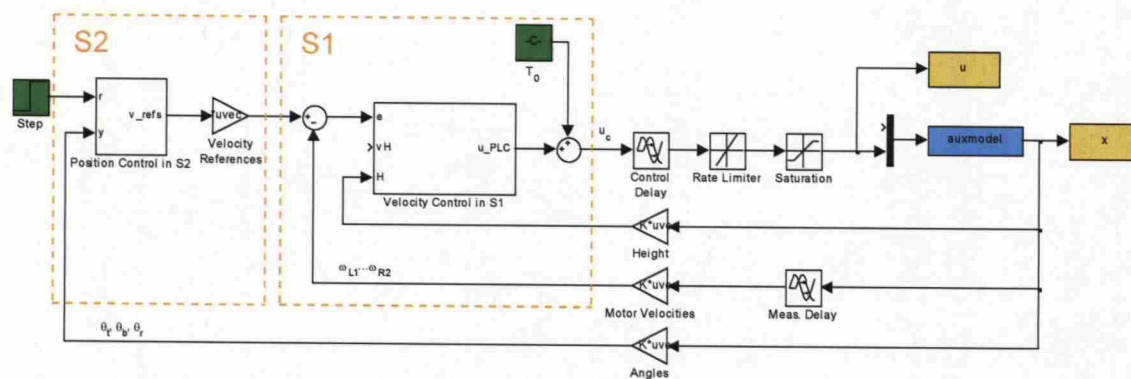
Edellä esitettyjen tarkastelujen pohjalta esitetään käytettäväksi taulukon 8 mukaisia PI-säätimien parametreja. Etäisyys H on rajoitettu vähintään 5 metriin ja korkeintaan 20 metriin. Samoin kontin massan sallitaan olevan korkeintaan 30 000 kg. Mikäli etäisyys tai massa ei ole annettujen arvojen sallitulla alueella, käytetään alueen lähintä ääriarvoa. Lisäksi vahvistus K_p tulee rajoittaa ei-negatiiviseksi.

Taulukko 8: Suunnitellut PI-säätimien parametrit

	vaunusuuntainen säädin	pukinsuuntainen säädin	rotaatiosäädin
b	0,80	0,85	0,85
$K_{p, \min}$	$10,2H^2 - 462H + 5160$	$16,4H^2 - 581H + 5110$	$8,3H^2 - 279H + 2340$
$K_{p, \max}$	$20,2H^2 - 705H + 7140$	$10,6H^2 - 418H + 4710$	$11,5H^2 - 386H + 3370$
K_p	$K_{p, \max} - (K_{p, \max} - K_{p, \min}) \cdot m_c / 30\,000$		
K_i	$-0,70H^3 + 33,9H^2 - 560H + 3590$	$-0,52H^3 + 25,1H^2 - 418H + 2750$	$-0,29H^3 + 14,5H^2 - 241H + 1410$

7.2.3 Kaskadisäätö

Edellisessä alaosiossa viritetty säätöpiiri voidaan helposti esittää myös normaalina kaskadisäätöpiirinä. Tällöin S2:n laskemaa ohjausta ei summata suoraan kokonaisohjaukseen, vaan se viedään sisemmän silmukan säätimen asetusarvoksi (kuva 47). Kyseessä on nyt tyypillinen esimerkki kaskadipaikkasäädöstä, jossa ulommassa silmukassa säädetään paikkaa ja sisemmässä silmukassa nopeutta. Kuten alaosiossa 4.2.4 todettiin, käytetään tällaisessa tapauksessa ulommassa silmukassa PI-säädintä ja sisemmässä silmukassa P-säädintä. Näin tilanne ei siis juuri eroa aiemmasta, sillä S2 säätää edelleenkin kuormauselimen paikkaa PI-säätimillä, ja S1:n säädin voidaan toteuttaa samoin kuin ennen.



Kuva 47: Kaskadisäätöpiiri

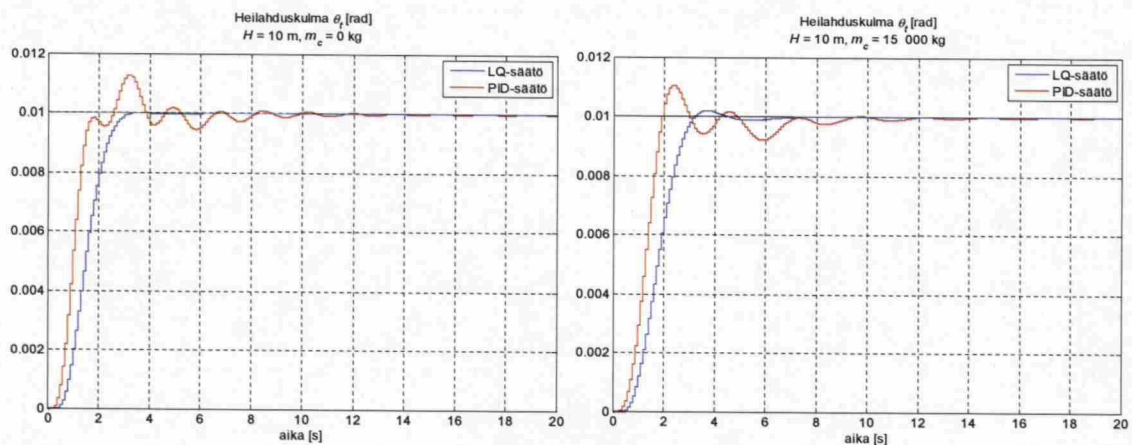
Tarkempi tarkastelu tuo ilmi, että säätöpiiri on lähes kokonaan sama kuin ennen. Ainut ero muodostuu PI-säätimen laskeman ohjauksen kertomisesta S1:n käyttämällä vahvistuksella. Jos säätö kuitenkin halutaan toteuttaa tässä muodossa, käytetään samaa PI-säädintä, joka suunniteltiin edellisessä alaosiossa. S2:n laskema ohjaus on lopuksi jaettava joko S2:ssa tai S1:ssä S1:n säädön vahvistuksella. Tämän jälkeen kuvan 47 säätöpiiri vastaa täysin kuvan 36 kaaviota, ja tuloksena on täsmälleen sama säätötulos.

Tämä kaskadisäädön rakenne ei tuo parannusta suorituskykyyn, koska myös suunniteltu PI+D-säädin on itse asiassa kaskadisäädin, vaikkei se välttämättä heti siltä näytäkään. Määritelmän mukaan kaskadisäädössä sisemmässä silmukassa on käytössä jokin apusuure, jonka dynamiikka on ulompaa silmukkaa nopeampi. Apusuureina kummassakin tapauksessa ovat nyt moottorien kulmanopeudet heilahduskulmien derivaattojen sijaan.

7.3 Säätoratkaisuiden vertailua

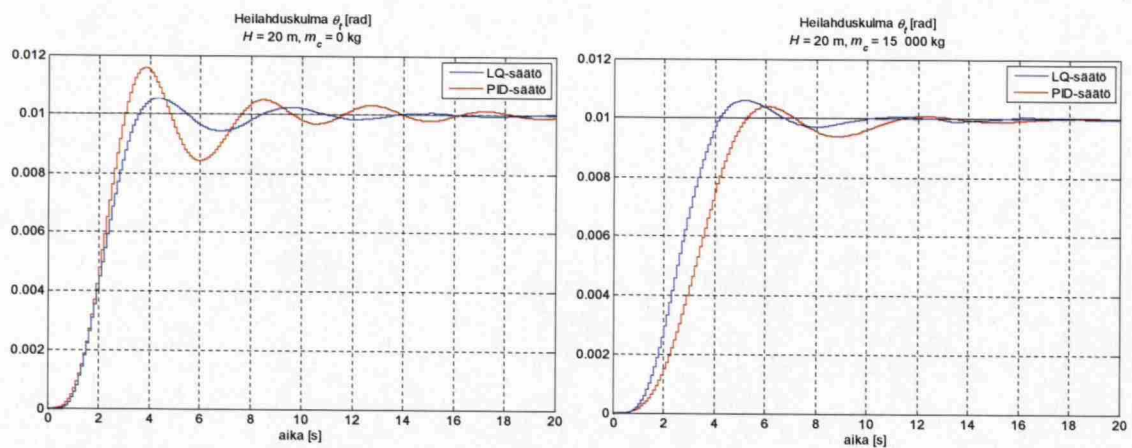
Verrataan osioissa 7.1 ja 7.2 suunniteltuja säätimiä toisiinsa. Tutkitaan ensin askelvasteita eri nostoköysien pituuksilla ja kontin massoilla. Valitaan ensin $H = 10$ m ja simuloidaan askelvastetta, kun $\theta_{t,ref} = 0,01$ rad kuormauselimen lähtiessä levosta. Saadut kuvaajat massoilla $m_c = 0$ kg ja $m_c = 15\,000$ kg on esitetty kuvassa 48. LQ-optimisäädin antaa odotetusti paremman vasteen. Se ohjaa kuormauselimen rauhallisemmin asetusarvoon, jonka seurauksena saavutetaan PID-säätöä pienempi

ylitys ja vähemmän värähtelevä vaste. LQ-säädin toimii erinomaisen hyvin, sillä sen painomatriisit valittiin tällä etäisyydellä.



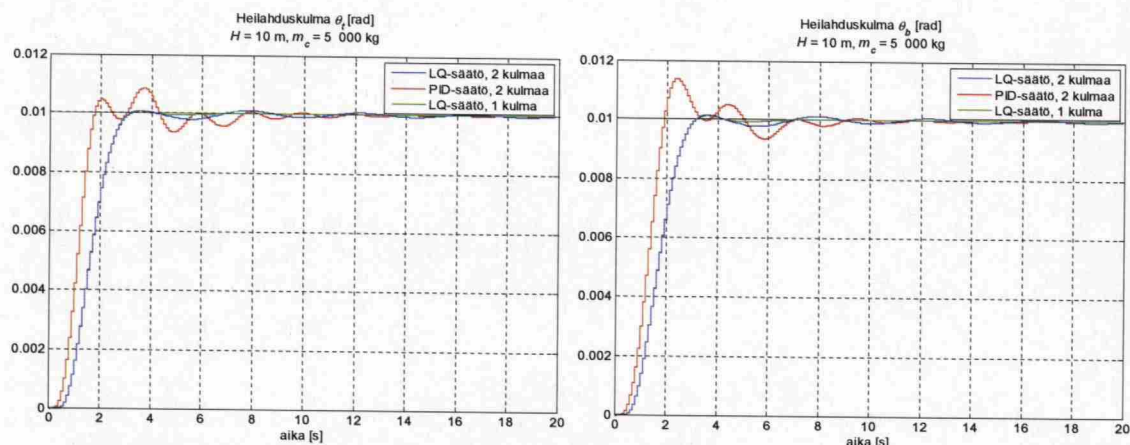
Kuva 48: LQ- ja PID-säätöjen vertailua, kun $H = 10 \text{ m}$

Kasvattamalla nostoköysien pituudet kaksinkertaisiksi (kuva 49) säädinten toiminnassa ei ole enää niin suurta eroa. LQ-säätö on kuitenkin edelleen parempi. PID-säätö hyötyy siitä, että se on optimoitu jokaiselle etäisyydelle ja massalle erikseen. LQ-säätimen toimintaa saisi paremmaksi vaihtamalla painomatriiseja köysien pituuksien ja kontin massan funktioina. Kaiken kaikkiaan voidaan sanoa, että LQ-säätö toimii PID-säätöä paremmin, mutta ero ei ole valtaisa.



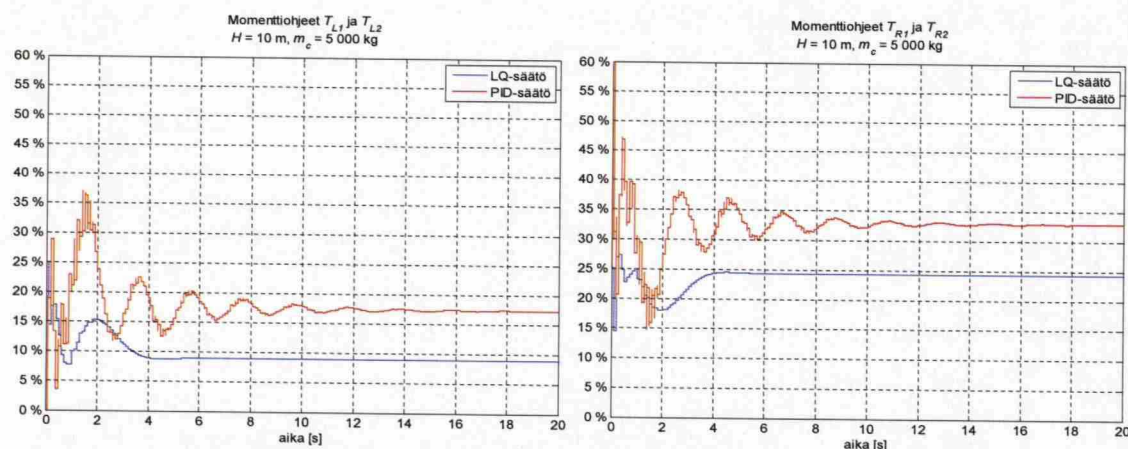
Kuva 49: LQ- ja PID-säätöjen vertailua, kun $H = 20 \text{ m}$

Kummallakin säätörakenteella onnistuu myös useamman kuin yhden kulman säätäminen samaan aikaan, kuten kuvassa 50 on esitetty. Kuviin on vertailun vuoksi piirretty vihreällä värillä LQ-säädön vaste, kun kerrallaan säädetään vain yhtä kulmaa. Vertaamalla sinistä ja vihreää kuvaajaa todetaan, että ristikkäisvaikutukset ovat erittäin pienet, jolloin kulmia voidaan säätää lähes toisistaan riippumatta. Tämä osaltaan selittää, miksi kolmella rinnakkaisella PI-säätimellä voidaan varsin hyvin hallita kyseistä monimuuttujajärjestelmiä.



Kuva 50: LQ- ja PID-säätöjen vertailua, kun kulmia θ_i , θ_b säädetään yhtä aikaa

Kuvaan 51 on piirretty vasteiden luomiseen käytetyt momenttiohjeet T_{L1} , T_{R1} , T_{L2} ja T_{R2} , kun säädetään ainoastaan kulmaa θ_i . Symmetrian vuoksi saman puoleisten moottorien ohjeet ovat keskenään samat. LQ-säätö tuottaa hyvin pehmeän ohjauksen verrattuna PID-säätöön. Myös lopputilan momenttiohje jää LQ-säädössä PID-säätöä pienemmäksi. Sen suuruuteen vaikutetaan painomatriisiin \mathbf{R} alkioiden arvoilla.



Kuva 51: LQ- ja PID-säätöjen tuottamat ohjaukset, kun ohjataan kulmaa θ_i

LQ-säädön käytännön toteutuksen kannalta olennainen haittapuoli on, että se on erittäin herkkä viiveen muutoksille. Esimerkiksi muuttamalla pelkkää ohjausviivettä noin 5 % suuntaan tai toiseen säädöstä tulee epästabiili. Puolittamalla säädinmatriisien \mathbf{K} ja \mathbf{K}_f arvot viiveen toleranssiksi saadaan kasvatettua noin 10 %, mutta tätä enempää ohjausviivettä ei ole varaa muuttaa, vaikka matriisien arvoja pienennettäisiin edelleen. PID-säätö puolestaan on robustimpi mahdollistaen säädön hyvyuden vaatimuksista riippuen 5-10-kertaisen ohjausviiveen.

8 Yhteenveto

Satamien tarve tehostaa kontinkäsittelyä on luonut kehityssuunnan, joka keskittyy konttinnostureiden suorituskyvyn kasvattamiseen. Tämän eräänä osa-alueena on kontinpoiminta, jota tässä työssä tutkittiin kuormauselimen paikkasäädön osalta.

Työn lähtökohdaksi oli annettu kuormauselimen dynaaminen malli. Mallin kompleksisuudesta johtuen eri säädinvaihtoehtoja ei ollut valittavissa montaa kappaletta. Analyttiseksi ratkaisuksi valittiin LQ-optimisäädin ja sitä verrattiin PID-säätöön, jossa huomioidaan ainoastaan prosessin ulostulo. Yksinkertaistetun mallin tai sumean säätimen käyttöä ei nähty mielekkäänä.

Säädinten suunnittelua varten työssä esitettiin teoriatasolla tilaesitys, tilatarkkailija, säätöpiirissä esiintyvät viiveet ja mainitut säädinrakenteet viritysmenetelmiseen. Tarkastelut tehtiin ensin jatkuva ajan alueella ja laajennettiin sitten koskemaan diskreettiä aikaa. Tämän jälkeen esitetylle mallille suunniteltiin simuloiden mainitut kaksi säätörakennetta. Suunnittelu tehtiin MATLAB-ohjelmistolla käyttäen hyväksi sen Simulink-ohjelmaa.

Ohjauksina päätettiin käyttää ainoastaan apukoneistoja. Suunnittelussa otettiin huomioon sekä ohjausten rajoitettu toiminta-alue että mittaus- ja ohjausviive. Myös mittauskohinan käsittelyä sivuttiin. LQ-säädin viritettiin karkeasti yritys-erehdysmenetelmällä yhdelle toimintapisteelle, mutta työ osoitti säädön toimivan tällä v erityksellä muissakin pisteissä. PID-säätö, joka toteutettiin kolmella rinnakkaisella PI-säätimellä nykyisen heilahduksenhallinnan yhteyteen, viritettiin kustannuskriteerejä käyttäen jokaiselle toimintapisteelle erikseen. PI-säätimissä käytettävien parametrien valitsemiseksi optimoituihin arvoihin sovitettiin 2. ja 3. asteen käyrät. Kummallakin säätörakenteella onnistui myös useamman kuin yhden kulman säätäminen yhtä aikaa. Järjestelmän määräämä näytteenottoväli osoittautui sopivaksi.

Simulointien perusteella LQ-säätö toimii odotetusti PID-säätöä paremmin. Se tuottaa lähes värähtelemättömän vasteen ja sen laskemat ohjaukset ovat rauhallisesti muuttuvia, jolloin ne myös rasittavat vähemmän koneistoja ja rakenteita. LQ-säädin on myös verrokkiaan helpompi virittää. Tilasäädin voi kuitenkin olla hankala toteuttaa käytännössä, sillä se vaatii prosessia hyvin kuvaavan mallin, sen esittämisen lineaarisena tilaesityksenä ja toimivan tilatarkkailijan. Linearisoinnin onnistumiseksi tietyt toimintapisteet on kyettävä mittaamaan vaativalla tarkkuudella. Lisäksi koko säädön stabiilius on erittäin herkkä viiveiden muutoksille.

PID-säätö on puolestaan helppo saada toimimaan käytännössä. Se on myös huomattavasti LQ-säädintä robustimpi mallin parametrien epävarmuuksille ja viiveiden muutoksille. PID-säädön huonona puolena on, että sen työläs ja aikaa vievä numeerinen viritys joudutaan tekemään jokaiselle simulointimallin muutokselle kokonaan uudestaan. Myöskään suorituskyky ei ole paras mahdollinen, joskin mallin

olemattomista ristikkäisvaikutuksista johtuen se ei jää valtaisesti jälkeen LQ-säädön vastaavasta.

Tämä diplomityö antaa matemaattisen mallin kuormauselimen dynamiikan simulointiin ja esittelee kaksi säädinrakennetta sen ohjaamiseksi. Mallin avulla voidaan suunnitella kokonaan uusia säätimiä tai kehittää edelleen työhön valittuja ratkaisuja. LQ-säädössä seuraava kehitysaskel olisi valita painomatriisit kulloisenkin toimintapisteen mukaan. Virityksessä myös voitaisiin käyttää karkean kokeilun sijasta kehittyneempiä menetelmiä, kuten geneettistä algoritmia tai numeerista optimointia PI-säätimien tapaan. Myös rajoitettujen ohjausten huomioiminen tehtävänasettelussa olisi mahdollista. Toisaalta jatkossa kannattaa kuitenkin keskittyä PID-säätöön sen helpomman toteutuksen ja robustimman luonteen vuoksi. Sen jatkokehitykseen kuuluvat esimerkiksi adaptiivisuuden parantaminen ja mittaussignaalin suodatus. PI-säädön toteutus pääpiirteissään on esitetty liitteessä C.

Työ jatkuu luontevasti siirtymällä simulointimalleista käytännön testeihin, joita ei tämän työn puitteissa ehditty tehdä riittävän hyvin. Parhaimman tuloksen saavuttamiseksi työssä esitetty malli tulisi ensin validoida ja siihen tulisi tehdä mahdolliset parannukset. Tämän jälkeen säätimien parametrit optimoitaisiin uudelleen ja säädön toimivuutta arvioitaisiin käytännössä.

Lähdeluettelo

- Al-Garni, A. Z. & Moustafa, K. A. & Javeed Nizami, S. S. A. K. 1995. *Optimal Control of Overhead Cranes*. Control Engineering Practice. Vol. 3:9. S. 1277-1284.
- Anderson, B. D. & Moore, J. B. 1989. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Englewood Cliffs (NJ), USA: Prentice-Hall. 380 s. ISBN 0-13-638651-2.
- Bozzo, R. & Derito, A. & Nurchi, R. & Ackroyd, N. 2001. *MOCONT: a new system for container terminal monitoring and control*. IEEE Intelligent Transportation Systems Conference Proceedings. Oakland (CA), USA. S. 1090-1094.
- Bromma. 2005. *Marathon™ yard crane spreaders product catalog*. 2005.
- Cargo Systems. 2009. *Top 100 Container Ports*. Saatavilla 1.9.2009 http://www.cargosystems.net/content/mt/freightpubs/cs/docs/CSTop100_09_06-07.pdf
- Cartmell, M. P. & Morrish, L. & Taylor, A. J. 1998. *Dynamics of spreader motion in a gantry crane*. Proc. Instn Mech. Engrs. Vol 212, Part C: J. Mechanical Engineering Science. S. 85-105.
- CONTAINEX. 2007. Saatavilla 15.9.2009 http://www.containex.fi/dokumente/484_FI.jpg
- Corriga, G. & Giua, A. & Usai, G. 1998. *An Implicit Gain-Scheduling Controller for Cranes*. IEEE Transactions on Control Systems Technology. Vol 6:1. S. 15-20.
- Cudahy, B. J. 2006. *The Containership Revolution*. TR News (Transportation Research Board). 246. S. 5-9. ISSN 0738-6826.
- Dorf, R. C. & Bishop, R. H. 2004. *Modern Control Systems*. 10. p. Upper Saddle River (NJ), USA: Pearson Prentice Hall. 881 s. ISBN 0-13-127765-0. 11. p. Saatavilla 1.6.2009 <http://books.google.com/books?id=V-FpzJP5bEIC&printsec=frontcover&dq=Modern+Control+Systems&hl=fi>.
- ECSCA (European Community Shipowners' Associations). 2005. *Annual Report 2004-2005*. 68 s. Saatavilla 1.9.2009 <http://www.ecsa.be/ar/Rapport%202004-2005.pdf>.
- Finnish Port Association. 2009. *Annual statistics, Container traffic, 2008*. Saatavilla 1.9.2009 http://www.finnports.com/statistics.php?series=2008&table_id=32.
- Franklin, G. F. & Powell, J. D. & Emami-Naeini, A. 2006. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 5. p. Upper Saddle River (NJ), USA: Pearson Prentice Hall. 703 s. ISBN 0-13-201612-5.

Franklin, G. F. & Powell, J. D. & Workman, M. 1998. *Digital Control of Dynamic Systems*. 3. p. Menlo Park (CA), USA: Addison-Wesley. 742 s. ISBN 0-201-33153-5 (nid.), 0-201-82054-4 (sid.).

Glad, T. & Ljung, L. 2000. *Control Theory: Multivariable and Nonlinear Methods*. Lontoo, Englanti: Taylor & Francis. 467 s. ISBN 0-7484-0878-9.

Hakkala, L. & Ylinen, R. 1980. *Johdatus moderniin systeemi- ja säätöteoriaan*. Espoo: Otakustantamo. 220 s. ISBN 951-671-158-8.

Härkönen, A. & Maasalo, V. & Näveri, J. & Zenger, K. 2006. *TKK:n kurssin AS-74.2112 Digitaalinen säätö verkkokurssi: oppitunti 2 - näytteenotto: näytteenottotaajuuden valinta*. Saatavilla 26.5.2009 <http://www.control.hut.fi/Kurssit/Verkkokurssit/AS-74.2112/oppitunti2/taajuus.html>.

Joshi, S. & Rahn, C. D. 1995. *Position Control of a Flexible Cable Gantry Crane: Theory and Experiment*. Proceedings of the American Control Conference. S. 2820-2824.

Kim, Y.-S. & Hong, K.-S. & Sul, S.-K. 2004. *Anti-Sway Control of Container Cranes: Inclinometer, Observer, and State Feedback*. International Journal of Control, Automation, and Systems. Vol 2:4. S. 435-449.

Kim, D.-H. & Lee, J.-W. 2006. *Model-based PID control of a crane spreader by four auxiliary cables*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. Vol 220:8. S. 1151-1165.

Koponen, P. & Virkkunen, J. 1983. *Nosturin minimiaikaohjaus*. Espoo: TKK. 14 s. ISSN 0356-0872; 45.

Koukussa. 2009. *RTG-nosturi on suurten konttipihojen tehotyökalu*. Koukussa. Kesäkuu 2009. S. 9.

Kuo, B. C. 1991. *Automatic Control Systems*. 6. p. Englewood Cliffs (NJ), USA: Prentice-Hall International. 760 s. ISBN: 0-13-053505-2.

Lappalainen, H. 2004. *Nosturin heilahduksenhallintajärjestelmän viritys*. Diplomityö. Teknillinen Korkeakoulu, konetekniikan osasto. Espoo. 96 s.

Lee, H.-H. 1998. *Modeling and Control of a Three-Dimensional Overhead Crane*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol 120. S. 471-476.

Lee, H.-H. 2003. *A new approach for the anti-swing control of overhead cranes with high-speed load hoisting*. International Journal of Control. Vol 76:15. S. 1493-1499.

Lee, H.-H. & Cho, S.-K. 2001. *A New Fuzzy-Logic Anti-Swing Control for Industrial Three-Dimensional Overhead Cranes*. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics & Automation. S. 2956-2961.

Lee, J.-W. & Kim, D.-H. 2004. *Dynamics of a spreader suspended by four flexible cables*. Proc. Instn Mech. Engrs. Vol 218, Part C: J. Mechanical Engineering Science. S. 1125-1138.

Lee, J.-W. & Kim, D.-H. & Oh, J.-H. 2003. *A unified approach to the kinematics of a spreader suspended by multiple cables*. Proc. Instn Mech. Engrs. Vol 217, Part C: J. Mechanical Engineering Science. S. 289-312.

Mahfouf, M. & Kee, C. H. & Abbod, M. F. & Linkens, D. A. 2000. *Fuzzy Logic-Based Anti-Sway Control Design for Overhead Cranes*. Neural Computing & Applications 9. S. 38-43.

Masoud, Z. N. & Nayfeh, A. H. 2003. *Sway Reduction on Container Cranes Using Delayed Feedback Controller*. Nonlinear Dynamics 34. S. 347-358.

Morrish, L. & Cartmell, M. P. & Taylor, A. J. 1997. *Geometry and kinematics of multicable spreader lifting gear*. Proc. Instn Mech. Engrs. Vol 211, Part C: J. Mechanical Engineering Science. S. 185-194.

Moustafa, K. A. 1994. *Feedback control of overhead cranes swing with variable rope length*. Proceedings of the American control conference. S. 691-695.

Ogunnaike, B. A. & Ray, W. H. 1994. *Process Dynamics, Modeling, and Control*. New York, USA: Oxford University Press. 1260 s. ISBN 0-19-509119-1.

Pinkham, M. 2008. *Staying afloat*. HOIST. September 2008. S. 22-24. ISSN 1462-0162. Saatavilla 1.9.2009 myös <http://www.hoistmagazine.com/digitaledition>.

Robinson, B. 2008. *Speeding up cranes for the largest container ships*. Cargo Systems. December 2008. S. 42-43.

Salomäki, J. 2008. Konecranes, sisäinen materiaali.

Sorsa, T. 1994. Konecranes, sisäinen materiaali.

The Mathworks. 2009. *MATLAB R2009a*. [Tietokoneohjelmisto]. Control System Toolbox, funktioluettelo. Saatavilla 1.6.2009 myös <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/control/index.html>.

Toivonen, E. & Eriksson, L. 2006. *TKK:n kurssin AS-0.2230 Automaatio- ja systeemitekniikan laboratoriotyöt oppimateriaali*. Saatavilla 18.6.2009 https://noppa.tkk.fi/noppa/kurssi/as-0.2230/tyo_8_konttinosturi.

Virtanen, K. 2008. *TKK:n kurssin Mat-2.4129 Systeemien identifiointi L oppimateriaali*. Saatavilla 26.5.2009 <https://noppa.tkk.fi/noppa/kurssi/mat-2.4129/luennot>.

Watanabe, K. & Ito, M. 1980. *A Process-Model Control for Linear Systems with Delay*. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol 26:6. S. 1261-1269. ISSN 0018-9286.

Wikipedia. 2009. *Intermodal container*. Saatavilla 15.9.2009. http://en.wikipedia.org/wiki/Intermodal_container

Wikipedia. 2009. *Twenty-foot equivalent unit*. Saatavilla 15.9.2009. http://en.wikipedia.org/wiki/Twenty-foot_equivalent_unit

Ylén, J.-P. 2009. *TKK:n kurssin AS-74.2111 Analoginen säätö oppimateriaali*. Saatavilla 26.5.2009 <https://noppa.tkk.fi/noppa/kurssi/as-74.2111/luennot>.

Yoshida, K. & Kawabe, H. 1992. *A Design of Saturating Control with a Guaranteed Cost and Its Application to the Crane Control System*. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 37:1.

Young, B. 2008. *Interview with Pekka Lundmark*. Cargo Systems. November 2008. S. 32-33.

Young, B. 2009. *A waste of money?* Cargo Systems. June 2009. S. 30-31.

Zenger, K. 2006. *TKK:n kurssin AS-74.2112 Digitaalinen säätö oppimateriaali*.

Zenger, K. 2008. *TKK:n kurssin AS-74.3123 Model-based Control Systems P oppimateriaali*. Saatavilla 26.5.2009 <https://noppa.tkk.fi/noppa/kurssi/as-74.3123/luennot>.

Åström, K. J. & Hägglund, T. 1988. *Automatic Tuning of PID Controllers*. Research Triangle Park (NC), USA: Instrument Society of America. 141 s. ISBN 1-55617-081-5.

Åström, K. J. & Hägglund, T. 1995. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. 2. p. Research Triangle Park (NC), USA: Instrument Society of America. 343 s. ISBN 1-55617-516-7.

Åström, K. J. & Wittenmark, B. 1997. *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*. 3. p. Upper Saddle River (NJ), USA: Prentice-Hall. 557 s. ISBN 0-13-314899-8.

Liite A

Tässä liitteessä johdetaan LQR-ongelman ratkaisu tutkimalla yleisen kustannuskriteerin minimoimista. Tätä varten tullaan esittelemään Hamilton-Jacobi-Bellman-ositaisdifferentiaaliyhtälö (HJB). Voidaan osoittaa, että mikäli HJB-yhtälön ratkaisulla on tietyt differentioituvuusominaisuudet, niin tämä ratkaisu on haluttu optimaalinen kustannus. HJB-yhtälöä edustaa vain riittävää eikä välttämätöntä ehtoa optimaaliselle kustannukselle. Välttämätön ehto voidaan johtaa käyttäen Pontryaginin maksimiperiaatetta (tai toisin muotoiltuna minimiperiaatetta). Tällainen lähestymistapa on kuitenkin pitkä johtaa, joten selvästi yksinkertaisin keino on käyttää HJB-yhtälöä.

Tarkastellaan ensin yleistä tapausta, jossa systeemille pätee $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ tunnetulla alkutilalla $\mathbf{x}(t_0)$ ja jossa minimoitava kustannuskriteeri on

$$V(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}, t_0) = \int_{t_0}^T l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau + m(\mathbf{x}(T)). \quad (\text{A1})$$

Funktio f voi olla mielivaltainen, mutta l ja m valitaan ei-negatiivisiksi. Määritellään optimaalinen kustannus $V^*(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}[t, T]} [V(\mathbf{x}(t), t)]$. V^* ei siis riipu ohjauksesta \mathbf{u} , sillä alkutila ja aika määrittävät nimenomaisen ohjauksen. (Anderson, Moore, 1989, s. 9-13)

Bellmanin optimaalisuuden periaatteen (engl. *principle of optimality*) mukaan tulevien päätösten (eli ohjausten) on muodostettava optimaalinen toiminta nykyisestä tilasta eteenpäin riippumatta aikaisemmista päätöksistä, jotka ovat johtaneet nykyiseen tilaan (Zenger, 2008, luento 8). Näin ollen, kun valitaan $t_0 < t < t_m < T$, voidaan kokonaiskustannuksen minimointi välillä $[t, T]$ hajottaa tehtäväksi minimoida ensin kustannus välillä $[t, t_m]$ ja tämän jälkeen välillä $[t_m, T]$:

$$V^*(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}[t, t_m]} \left[\int_t^{t_m} l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau + V^*(\mathbf{x}(t_m), t_m) \right]. \quad (\text{A2})$$

Valitsemalla nyt $t_m = t + \Delta t$, jossa Δt on pieni, ja soveltamalla Taylorin teoreemaa yhtälön (A2) oikeaan puoleen, saadaan

$$V^*(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}[t, t+\Delta t]} \left\{ \Delta t \cdot l(\mathbf{x}(t + \alpha \cdot \Delta t), \mathbf{u}(t + \alpha \cdot \Delta t), t + \alpha \cdot \Delta t) + \right. \\ \left. V^*(\mathbf{x}(t), t) + \left[\frac{\partial V^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), t) \right]^T \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \Delta t + \frac{\partial V^*}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \Delta t \right\}, \quad (\text{A3})$$

jossa α on jokin vakio välillä $[0, 1]$. Yhtälöstä (A4) saadaan HJB-yhtälö antamalla Δt :n lähestyä nollaa:

$$\frac{\partial V^*}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) = -\min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \left[\frac{\partial V^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), t) \right]^T f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \right\}. \quad (\text{A4})$$

Tämän yhtälön ratkaisu V^* on siis kysytty minimikustannus. (Anderson, Moore, 1989, s. 13-15) Lisäksi on helpohkoa osoittaa, että tämä optimaalinen kustannus, mikäli sellainen on olemassa, on muotoa

$$V^*(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t), \quad (\text{A5})$$

missä \mathbf{P} voidaan yleisyyttä rajoittamatta valita symmetriseksi. Näin ollen

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) &= \mathbf{x}^T(t) \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}(t) & \text{ja} \\ \left[\frac{\partial V^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), t) \right]^T &= 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t). \end{aligned}$$

Hamilton-Jacobi-Bellman-yhtälön ratkaisuksi LQR-tapauksessa, jossa siis

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) &= \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) & \text{ja} \\ f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

ja jossa \mathbf{Q} ja \mathbf{R} ovat symmetrisiä, positiividefiniitteja matriiseja, saadaan

$$\mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} = -\min_{\mathbf{u}(t)} (\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u}). \quad (\text{A6})$$

Minimilauseke voidaan kirjoittaa myös neliöllisessä muodossa

$$(\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x})^T \mathbf{R} (\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) + \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{x}.$$

Koska matriisi \mathbf{R} on positiividefiniitti, on selvää, että lausekkeen minimikohta saavutetaan valitsemalla (lineaarinen) optimaalinen ohjaus

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t). \quad (\text{A7})$$

Lopuksi sijoittamalla (A8) yhtälöön (A7) saadaan matriisille \mathbf{P}

$$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t), \quad (\text{A8})$$

jonka havaitaan olevan Riccatin yhtälö reunaehdolla $\mathbf{P}(T, T) = \mathbf{S}_f$. (Anderson, Moore, 1989, s. 21-22)

Liite B

Esitetään alaosiossa 6.3.1 muodostetulle tilaesitykselle Jacobin matriisit \mathbf{J}_k , \mathbf{J}_{fu} ja \mathbf{J}_{fdm} tilaesityksen linearisointia varten. Laajennetaan tilaesitystä tilalla $x_{15} = H$, jonka derivaatta $\dot{x}_{15} = d_{ml}$.

Otetaan käyttöön merkinnät

$$k = \frac{E \cdot A_r}{x_{15} + \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + x_{15}^2}},$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + x_{15}^2}},$$

$$\text{aux}_{11} = Lx_3 + x_1x_{15} + d_1,$$

$$\text{aux}_{12} = Lx_3 + x_1x_{15} - d_1,$$

$$\text{aux}_{13} = -Lx_3 + x_1x_{15} + d_1,$$

$$\text{aux}_{14} = -Lx_3 + x_1x_{15} - d_1,$$

$$\text{den}_{11} = \text{aux}_{11}^2 + (x_2x_{15} + d_2)^2 + x_{15}^2,$$

$$\text{den}_{13} = \text{aux}_{13}^2 + (x_2x_{15} - d_2)^2 + x_{15}^2,$$

jolloin saadaan

$$\text{nom}_{11} = \text{aux}_{11} \cdot (Lx_6 + x_1d_{ml} + x_4x_{15}) + (x_2x_{15} + d_2)(x_2d_{ml} + x_5x_{15}) + x_{15}d_{ml},$$

$$\text{nom}_{12} = \text{aux}_{12} \cdot (Lx_6 + x_1d_{ml} + x_4x_{15}) + (x_2x_{15} + d_2)(x_2d_{ml} + x_5x_{15}) + x_{15}d_{ml},$$

$$\text{nom}_{13} = \text{aux}_{13} \cdot (-Lx_6 + x_1d_{ml} + x_4x_{15}) + (x_2x_{15} - d_2)(x_2d_{ml} + x_5x_{15}) + x_{15}d_{ml},$$

$$\text{nom}_{14} = \text{aux}_{14} \cdot (-Lx_6 + x_1d_{ml} + x_4x_{15}) + (x_2x_{15} - d_2)(x_2d_{ml} + x_5x_{15}) + x_{15}d_{ml},$$

$$\text{den}_{12} = \text{aux}_{12}^2 + (x_2x_{15} + d_2)^2 + x_{15}^2,$$

$$\text{den}_{14} = \text{aux}_{14}^2 + (x_2x_{15} - d_2)^2 + x_{15}^2,$$

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,11} & a_{4,12} & a_{4,11} & a_{4,12} & a_{4,15} \\ 0 & a_{5,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,11} & a_{5,11} & a_{5,13} & a_{5,13} & a_{5,15} \\ 0 & 0 & a_{6,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,11} & a_{6,12} & a_{6,12} & a_{6,11} & a_{6,15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,11} & 0 & 0 \\ a_{11,1} & a_{11,2} & a_{11,3} & a_{11,4} & a_{11,5} & a_{11,6} & a_{11,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11,15} \\ a_{12,1} & a_{12,2} & a_{12,3} & a_{12,4} & a_{12,5} & a_{12,6} & 0 & a_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12,15} \\ a_{13,1} & a_{13,2} & a_{13,3} & a_{13,4} & a_{13,5} & a_{13,6} & 0 & 0 & a_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13,15} \\ a_{14,1} & a_{14,2} & a_{14,3} & a_{14,3} & a_{14,5} & a_{14,6} & 0 & 0 & 0 & a_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{14,15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

jossa

$$a_{4,1} = \frac{-g}{x_{15}} \cos x_1, \quad a_{4,11} = \frac{-Zd_1}{Mx_{15}}, \quad a_{4,12} = \frac{Zd_1}{Mx_{15}}, \quad a_{4,15} = \frac{g \sin x_1 + d_{m2}}{x_{15}^2} - \frac{Zd_1(-x_{11} + x_{12} - x_{13} + x_{14})}{M} \left(\frac{1}{x_{15}^2} + \frac{1}{d_1^2 + d_2^2 + x_{15}^2} \right),$$

$$a_{5,2} = \frac{-g}{x_{15}} \cos x_2, \quad a_{5,11} = \frac{-Zd_2}{Mx_{15}}, \quad a_{5,13} = \frac{Zd_2}{Mx_{15}}, \quad a_{5,15} = \frac{g \sin x_2 + d_{m3}}{x_{15}^2} - \frac{Zd_2(-x_{11} - x_{12} + x_{13} + x_{14})}{M} \left(\frac{1}{x_{15}^2} + \frac{1}{d_1^2 + d_2^2 + x_{15}^2} \right),$$

$$a_{6,3} = \frac{LZ}{J_c} \left[(-d_1 \sin x_3 + d_2 \cos x_3)(x_{12} + x_{13}) + (d_1 \sin x_3 + d_2 \cos x_3)(x_{11} + x_{14}) \right] - \frac{L^2 Mg}{J_c x_{15}},$$

$$a_{6,11} = \frac{LZ}{J_c} (-d_1 \cos x_3 + d_2 \sin x_3), \quad a_{6,12} = \frac{LZ}{J_c} (d_1 \cos x_3 + d_2 \sin x_3),$$

$$a_{6,15} = \frac{-Lx_{15}}{J_c(d_1^2 + d_2^2 + x_{15}^2)^{3/2}} \left[(d_1 \cos x_3 + d_2 \sin x_3)(x_{12} + x_{13}) + (-d_1 \cos x_3 + d_2 \sin x_3)(x_{11} + x_{14}) \right] + \frac{L^2 Mg}{J_c x_{15}^2} x_3, \quad a_{7,11} = \frac{-Nr}{J},$$

$$\begin{aligned}
a_{11,1} &= \frac{k[\text{den}_{11} \cdot [\text{aux}_{11} \cdot d_{m1} + x_{15}(Lx_6 + x_1 d_{m1} + x_4 x_{15})] - x_{15} \cdot \text{aux}_{11} \cdot \text{nom}_{11}]}{\text{den}_{11}^{3/2}}, \\
a_{11,3} &= \frac{kL[\text{den}_{11} \cdot (Lx_6 + x_1 d_{m1} + x_4 x_{15}) - \text{aux}_{11} \cdot \text{nom}_{11}]}{\text{den}_{11}^{3/2}}, \quad a_{11,4} = \frac{k \cdot \text{aux}_{11} \cdot x_{15}}{\sqrt{\text{den}_{11}}}, \quad a_{11,6} = \frac{Lk \cdot \text{aux}_{11}}{\sqrt{\text{den}_{11}}}, \quad a_{11,7} = \frac{kr}{N}, \\
a_{11,15} &= \frac{k[\text{den}_{11} \cdot [d_{m1}(1 + x_1^2 + x_2^2) + d_1 x_4 + 2x_1 x_4 x_{15} + Lx_3 x_4 + d_2 x_5 + 2x_2 x_3 x_{15} + Lx_1 x_6] - [x_{15} + x_2(x_2 x_{15} + d_2) + x_1 \cdot \text{aux}_{11}] \cdot \text{nom}_{11}]}{\text{den}_{11}^{3/2}}, \\
a_{12,1} &= \frac{k[\text{den}_{12} \cdot [\text{aux}_{12} \cdot d_{m1} + x_{15}(Lx_6 + x_1 d_{m1} + x_4 x_{15})] - x_{15} \cdot \text{aux}_{12} \cdot \text{nom}_{12}]}{\text{den}_{12}^{3/2}}, \\
a_{12,3} &= \frac{kL[\text{den}_{12} \cdot (Lx_6 + x_1 d_{m1} + x_4 x_{15}) - \text{aux}_{12} \cdot \text{nom}_{12}]}{\text{den}_{12}^{3/2}}, \quad a_{12,4} = \frac{k \cdot \text{aux}_{12} \cdot x_{15}}{\sqrt{\text{den}_{12}}}, \quad a_{12,6} = \frac{Lk \cdot \text{aux}_{12}}{\sqrt{\text{den}_{12}}}, \\
a_{12,15} &= \frac{k[\text{den}_{12} \cdot [d_{m1}(1 + x_1^2 + x_2^2) - d_1 x_4 + 2x_1 x_4 x_{15} + Lx_3 x_4 + d_2 x_5 + 2x_2 x_3 x_{15} + Lx_1 x_6] - [x_{15} + x_2(x_2 x_{15} + d_2) + x_1 \cdot \text{aux}_{12}] \cdot \text{nom}_{12}]}{\text{den}_{12}^{3/2}}, \\
a_{13,1} &= \frac{k[\text{den}_{13} \cdot [\text{aux}_{13} \cdot d_{m1} + x_{15}(-Lx_6 + x_1 d_{m1} + x_4 x_{15})] - x_{15} \cdot \text{aux}_{13} \cdot \text{nom}_{13}]}{\text{den}_{13}^{3/2}}, \\
a_{13,3} &= \frac{-kL[\text{den}_{13} \cdot (-Lx_6 + x_1 d_{m1} + x_4 x_{15}) - \text{aux}_{13} \cdot \text{nom}_{13}]}{\text{den}_{13}^{3/2}}, \quad a_{13,4} = \frac{k \cdot \text{aux}_{13} \cdot x_{15}}{\sqrt{\text{den}_{13}}}, \quad a_{13,6} = \frac{-Lk \cdot \text{aux}_{13}}{\sqrt{\text{den}_{13}}}, \\
a_{13,15} &= \frac{k[\text{den}_{13} \cdot [d_{m1}(1 + x_1^2 + x_2^2) + d_1 x_4 + 2x_1 x_4 x_{15} - Lx_3 x_4 - d_2 x_5 + 2x_2 x_3 x_{15} - Lx_1 x_6] - [x_{15} + x_2(x_2 x_{15} - d_2) + x_1 \cdot \text{aux}_{13}] \cdot \text{nom}_{13}]}{\text{den}_{13}^{3/2}}, \\
a_{14,1} &= \frac{k[\text{den}_{14} \cdot [\text{aux}_{14} \cdot d_{m1} + x_{15}(-Lx_6 + x_1 d_{m1} + x_4 x_{15})] - x_{15} \cdot \text{aux}_{14} \cdot \text{nom}_{14}]}{\text{den}_{14}^{3/2}}, \\
a_{14,3} &= \frac{-kL[\text{den}_{14} \cdot (-Lx_6 + x_1 d_{m1} + x_4 x_{15}) - \text{aux}_{14} \cdot \text{nom}_{14}]}{\text{den}_{14}^{3/2}}, \quad a_{14,4} = \frac{k \cdot \text{aux}_{14} \cdot x_{15}}{\sqrt{\text{den}_{14}}}, \quad a_{14,6} = \frac{-Lk \cdot \text{aux}_{14}}{\sqrt{\text{den}_{14}}}, \\
a_{14,15} &= \frac{k[\text{den}_{14} \cdot [d_{m1}(1 + x_1^2 + x_2^2) - d_1 x_4 + 2x_1 x_4 x_{15} - Lx_3 x_4 - d_2 x_5 + 2x_2 x_3 x_{15} - Lx_1 x_6] - [x_{15} + x_2(x_2 x_{15} - d_2) + x_1 \cdot \text{aux}_{14}] \cdot \text{nom}_{14}]}{\text{den}_{14}^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Liite C

Seuraavassa listauksessa on esitetty C-kielinen funktio kuormauselimen ohjaamiseksi PI-säätimillä. Säätimet on toteutettu alaosiossa 7.2.2 esitetyn rakenteen mukaisesti. Käytännössä on huolehdittava yksikkömuunnoksista, skaalauksista, indeksoinneista, tulostuksista, virheen käsittelystä ja niin edelleen, mutta selkeyden vuoksi listauksessa on esitetty vain keskeisimmät osat.

```

/*****
Spreader micro move control for picking and stacking containers
    t, b      =    spreader center point current position
    r         =    spreader current skew angle
    ref_t,ref_b =    spreader center point target position
    ref_r      =    spreader target skew
    *motor_L1 ..=    torque references to aux motors
    H          =    rope length
    m_c        =    container weight
@return void
*****/
void MoveSpreader(float t, float b, float r,
                  float ref_t, float ref_b, float ref_r,
                  float *motor_L1, float *motor_R1,
                  float *motor_L2, float *motor_R2,
                  float H, float m_c) {
    float h = 0.1; // sample time
    float m_c_max = 30000; // max allowed container weight
    static int FIRST_TIME = 1;
    static float PREV_U_I_t = 0; // previous integral control
    static float PREV_U_I_b = 0;
    static float PREV_U_I_r = 0;

    if (FIRST_TIME) {
        FIRST_TIME = 0;
        // set torques to zero
        *motor_L1 = 0;
        *motor_R1 = 0;
        *motor_L2 = 0;
        *motor_R2 = 0;
    }

    // ***** PI-controller parameters *****

    // b: fraction of setpoint in prop. term
    float b_t = 0.80;
    float b_b = 0.85;
    float b_r = 0.85;

    // K_P: proportional gain
    float K_P_t_min = 10.2*H*H - 462.0*H + 5160.0;
    float K_P_t_max = 20.2*H*H - 705.0*H + 7140.0;
    float K_P_b_min = 16.4*H*H - 581.0*H + 5110.0;
    float K_P_b_max = 10.6*H*H - 418.0*H + 4710.0;
    float K_P_r_min = 8.3*H*H - 279.0*H + 2340.0;
    float K_P_r_max = 11.5*H*H - 386.0*H + 3370.0;

```



```

float K_P_t = K_P_t_max - (K_P_t_max-K_P_t_min) * m_c / m_c_max;
float K_P_b = K_P_b_max - (K_P_b_max-K_P_b_min) * m_c / m_c_max;
float K_P_r = K_P_r_max - (K_P_r_max-K_P_r_min) * m_c / m_c_max;

// gain in bridge direction and rotation could be negative
if (K_P_b < 0) {
    K_P_b = 0;
}
if (K_P_r < 0) {
    K_P_r = 0;
}

// K_I: integral gain
float K_I_t = -0.70*H*H*H + 33.9*H*H - 560.0*H + 3590.0;
float K_I_b = -0.52*H*H*H + 25.1*H*H - 418.0*H + 2750.0;
float K_I_r = -0.29*H*H*H + 14.5*H*H - 241.0*H + 1410.0;

//*****

// ***** Calculation of control of three directions *****

// e: error term
float e_t = ref_t - t;
float e_b = ref_b - b;
float e_r = ref_r - r;

// u_P: proportional part of control
float u_P_t = K_P_t * (b_t*ref_t - t);
float u_P_b = K_P_b * (b_b*ref_b - b);
float u_P_r = K_P_r * (b_r*ref_r - r);

// u_I: integral part of control
float u_I_t = PREV_U_I_t + h * K_I_t * e_t;
float u_I_b = PREV_U_I_b + h * K_I_b * e_b;
float u_I_r = PREV_U_I_r + h * K_I_r * e_r;

PREV_U_I_t = u_I_t;
PREV_U_I_b = u_I_b;
PREV_U_I_r = u_I_r;

// u: control in absolute units [Nm]
float u_t = u_P_t + u_I_t;
float u_b = u_P_b + u_I_b;
float u_r = u_P_r + u_I_r;

//*****

// ***** Conversions from dir. controls to motor controls *****

*motorL1 = -u_t - u_b - u_r;
*motorR1 = u_t - u_b + u_r;
*motorL2 = -u_t + u_b + u_r;
*motorR2 = u_t + u_b - u_r;

//*****

}

```